

Alexandra Burger

Zum Erhalt der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit  
bei Diskretisierung dynamischer Systeme

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Elektrotechnik / Informatik der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. G. Kreisselmeier  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. A. Linnemann

Tag der mündlichen Prüfung

26. Juni 2008

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2008  
ISBN 978-3-89958-452-3  
URN: urn:nbn:de:0002-4527

© 2008, kassel university press GmbH, Kassel  
[www.upress.uni-kassel.de](http://www.upress.uni-kassel.de)

Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel  
Printed in Germany

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin im Fachgebiet Regelungs- und Systemtheorie an der Universität Kassel. Ich möchte mich an dieser Stelle für die vielfältige Unterstützung, die ich bei dieser Arbeit erfahren habe, bedanken. Mein erster und besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerhard Kreißelmeier für seine Anregungen und wertvollen Hinweise, die zum Gelingen der Arbeit entscheidend beigetragen haben. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Arno Linnemann danke ich herzlich für die Übernahme des Zweitgutachtens. Ich danke auch allen ehemaligen und derzeitigen Kollegen im Fachgebiet für das angenehme und positive Arbeitsklima. Vor allem Herr Dr.-Ing. Robert Engel war für mich in der Einarbeitungsphase ein stets hilfsbereiter Ansprechpartner.

Mein Dank gilt auch allen, die im privaten Umfeld zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Meine Eltern Karin und Hans, haben mir mein Studium ermöglicht und meinen Weg stets mit Interesse und Wohlwollen begleitet. Nicht zuletzt möchte ich Johannes danken, für seine Geduld, sein Verständnis und für den immer vollen Kühlschrank.

Würzburg, 14. August 2008

Alexandra Burger

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Beschreibung der betrachteten Systeme</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Steuerbarkeit</b>	<b>14</b>
3.1	Definition der Steuerbarkeit . . . . .	14
3.2	Erhaltung der Steuerbarkeit . . . . .	15
3.2.1	Simulationsbeispiel . . . . .	20
3.3	Steuerbarkeit impliziert „Regelbarkeit“ . . . . .	22
3.4	Steuerbarkeitsmaß . . . . .	25
3.4.1	Motivation zur Einführung eines Steuerbarkeitsmaßes . . . . .	25
3.4.2	Steuerbarkeitsmaß des Systems . . . . .	25
3.4.3	Steuerbarkeitsmaß für das diskretisierte System . . . . .	27
3.4.4	Anwendungen . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Beobachtbarkeit</b>	<b>31</b>
4.1	Definition der Beobachtbarkeit . . . . .	31
4.2	Erhaltung der Beobachtbarkeit . . . . .	32
4.3	Beobachtbarkeit impliziert „Existenz eines Beobachters“ . . . . .	36
4.4	Beobachtbarkeitsmaß . . . . .	38
4.4.1	Motivation zur Einführung eines Beobachtbarkeitsmaßes . . . . .	38
4.4.2	Beobachtbarkeitsmaß des Systems . . . . .	38
4.4.3	Beobachtbarkeitsmaß für das diskretisierte System . . . . .	40
4.4.4	Anwendungen . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Ansätze in der Literatur</b>	<b>47</b>
5.1	Steuerbarkeit . . . . .	47
5.1.1	Definition von Steuerbarkeit . . . . .	47
5.1.2	Erhalt von Steuerbarkeit bei Diskretisierung . . . . .	48
5.2	Beobachtbarkeit . . . . .	49
5.2.1	Definition von Beobachtbarkeit . . . . .	49
5.2.2	Erhalt von Beobachtbarkeit bei Diskretisierung . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Abschließende Bemerkungen</b>	<b>50</b>

<b>A</b>	<b>Lemmata</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Verzeichnis verwendeter Symbole</b>	<b>61</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Diskretisierung dynamischer Systeme und hier insbesondere mit der Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen sich die Eigenschaften der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit des Systems auf das diskretisierte System übertragen. Diese Frage ist von Bedeutung, stellt sie doch einen der Eckpfeiler dar, auf denen die heute übliche „Digitale Regelung“ (genauer gesagt handelt es sich dabei um „Abtastregelung“) aufbaut.

Für lineare dynamische Systeme ist diese Frage sehr umfassend geklärt und in einschlägigen Lehrbüchern (z. B. [1](S. 177, 203), [2] ) behandelt. Für nichtlineare dynamische Systeme - insbesondere wenn man sie nicht nur lokal, sondern global betrachtet - ist diese Frage dagegen ein weitaus offeneres Feld. Aus einer Literaturrecherche in einschlägigen Fachzeitschriften sind ohne den Anspruch auf Vollständigkeit die Arbeiten [3] -[21] zu nennen. Eine ausführlichere Besprechung der relevanten Arbeiten befindet sich in Kapitel 5. Einige Autoren kommen unter verschiedenen Voraussetzungen zu dem Ergebnis, dass sich Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit auf das diskretisierte System übertragen, wenn die gewählte Abtastzeit hinreichend klein ist. Dieses Ergebnis, das der Intuition und dem praktischen Bedarf des Ingenieurs entspricht, benötigt aber zu seiner Herleitung meist umfangreicher mathematischer Werkzeuge jenseits der in der Regelungstechnik üblichen Ingenieurmathematik.

Die vorliegende Arbeit hat es sich deshalb zur Aufgabe gemacht, mit den Mitteln der Ingenieurmathematik - und dabei mit möglichst allgemein gehaltenen, aber doch praktisch relevanten Voraussetzungen an das System - den Nachweis der Diskretisierbarkeit in obigem Sinne zu führen, und damit einen Beitrag zum tieferen Verständnis der Diskretisierung zu leisten.

Die Betrachtungen werden mit Bezug auf eine konkrete praktische regelungstechnische Aufgabenstellung durchgeführt, anhand derer sich auch der Begriff Diskretisierung konkretisiert.

### a) Regelungstechnischer Hintergrund

Eine zentrale Aufgabe in der Regelungstechnik ist der Betrieb eines Systems an einem gewünschten (konstanten) Betriebspunkt, einer so genannten Ruhelage. Diese Aufgabe kann man durch die Verwendung einer Struktur mit zwei Freiheitsgraden in eine reine Steuerungsaufgabe und das Ausregeln der Differenz zwischen Soll- und Istwert aufteilen (s. z. B. [22]). Soll beispielsweise der Ausgang  $y_\Sigma$  eines nichtlinearen Systems im Zustandsraum

$$\dot{x}_\Sigma = f_\Sigma(x_\Sigma, u_\Sigma) \quad (1.1)$$

$$y_\Sigma = h_\Sigma(x_\Sigma) \quad (1.2)$$

auf einen konstanten Sollwert  $\bar{y}_\Sigma$  geregelt werden, kann man stets folgendermaßen vorgehen:

1. Bestimmung der Ruhelage(n)  $\{\bar{u}_\Sigma, \bar{x}_\Sigma, \bar{y}_\Sigma\}$ , die dadurch gekennzeichnet sind, dass gilt:  $f_\Sigma(\bar{x}_\Sigma, \bar{u}_\Sigma) = 0$ ,  $\bar{y}_\Sigma = h_\Sigma(\bar{x}_\Sigma)$ .
2. Bestimmung der Steuerung  $\bar{u}_\Sigma = S_u(\bar{y}_\Sigma)$ ,  $\bar{x}_\Sigma = S_x(\bar{y}_\Sigma)$ , die diese Ruhelage(n) erhält.
3. Aufstellen der Differentialgleichung für die Abweichung  $\Delta u_\Sigma := u_\Sigma - \bar{u}_\Sigma$ ,  $\Delta x_\Sigma := x_\Sigma - \bar{x}_\Sigma$ ,  $\Delta y_\Sigma := y_\Sigma - \bar{y}_\Sigma$  von der Ruhelage

$$\Delta \dot{x}_\Sigma = \dot{x}_\Sigma - \dot{\bar{x}}_\Sigma \quad (1.3)$$

$$= f_\Sigma(x_\Sigma, u_\Sigma) \quad (1.4)$$

$$= f_\Sigma(\bar{x}_\Sigma + \Delta x_\Sigma, \bar{u}_\Sigma + \Delta u_\Sigma) \quad (1.5)$$

$$= f(\Delta x_\Sigma, \Delta u_\Sigma) \quad (1.6)$$

$$\Delta y_\Sigma = h_\Sigma(x_\Sigma) - h_\Sigma(\bar{x}_\Sigma) \quad (1.7)$$

$$= h_\Sigma(\bar{x}_\Sigma + \Delta x_\Sigma) - h_\Sigma(\bar{x}_\Sigma) \quad (1.8)$$

$$= h_0(\Delta x_\Sigma) \quad (1.9)$$

4. Stabile Regelung des Systems  $(f, h_0)$  an seiner Ruhelage  $\{\Delta \bar{u}_\Sigma, \Delta \bar{x}_\Sigma, \Delta \bar{y}_\Sigma\} = \{0, 0, 0\}$ .

In Abbildung 1.1 ist die Struktur des Regelkreises dargestellt. Im Block Steuerung wird die zu  $\bar{y}_\Sigma$  passende Ruhelage  $\bar{u}_\Sigma, \bar{x}_\Sigma$  eingestellt. Der Regler soll die Abweichungen von der Ruhelage stabil ausregeln.

Man sieht, dass die verbleibende Aufgabe die Regelung des Systems  $(f, h_0)$  an der Ruhelage  $\{\Delta \bar{u}_\Sigma, \Delta \bar{x}_\Sigma, \Delta \bar{y}_\Sigma\} = \{0, 0, 0\}$  ist. Da  $(f, h_0)$  von  $\bar{y}_\Sigma$  abhängt, wird es im Allgemeinen erforderlich sein, den Regler passend zur gewünschten Ruhelage  $\bar{y}_\Sigma$  (parametrisiert mit  $\bar{y}_\Sigma$ ) zu bestimmen. Diese Arbeit wendet sich nur Fragestellungen im Zusammenhang mit der Regelung an der Ruhelage zu. Angesichts obiger Betrachtung und mit den Bezeichnungen

$$u := \Delta u_\Sigma \quad (1.10)$$

$$x := \Delta x_\Sigma \quad (1.11)$$

$$y := \Delta y_\Sigma \quad (1.12)$$

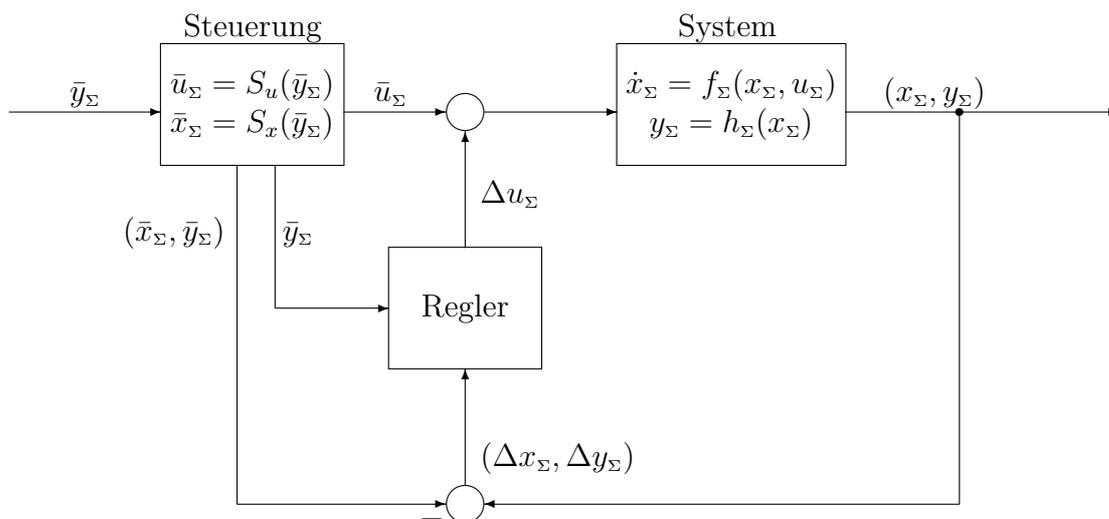


Abbildung 1.1: Struktur mit zwei Freiheitsgraden

kann im Weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit ausschließlich das System

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.13)$$

$$y = h_0(x) \quad (1.14)$$

und seine Ruhelage  $\{\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}\} = \{0, 0, 0\}$  betrachtet werden.

### b) Diskretisierung

Die Implementierung eines Reglers erfolgt heute meist auf einem Rechner. Diese Rechner arbeiten zeitdiskret. Das bedeutet, sie generieren aus einer Folge von Eingangsdaten eine Folge von Ausgangsdaten. Der Datenfluss ist nicht kontinuierlich in der Zeit, sondern zeitdiskret und unterliegt einem gewissen Zeittakt. Dementsprechend benötigt ein so genannter digitaler Regelkreis, wie in Abbildung 1.2 dargestellt, (zusätzlich zur zeitkontinuierlichen Strecke und dem zeitdiskreten Regler) einen Abtaster A und ein Halteglied H. Der Abtaster erzeugt aus dem zeitkontinuierlichen Ausgangssignal  $y(\cdot)$  des Systems eine Ausgangsfolge  $\underline{y} := \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ,  $y_k := y(t_0 + kT)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$ . Der Rechner setzt diese Ausgangsfolge in die Stellfolge  $\underline{u} := \{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ,  $u_k := u(t_0 + kT)$  um. Das Halteglied generiert aus der Stellfolge wiederum das zeitkontinuierliche Eingangssignal  $u(\cdot)$ , das auf die zeitkontinuierliche Strecke wirkt. Das Ausgangssignal wird mit dem Zeittakt  $T$  abgetastet.  $T$  entspricht der Zeitspanne, über die das Halteglied das aktuelle Element der Stellfolge für die Erzeugung des kontinuierlichen Stellsignals benutzt. Diese Zeit  $T$  heißt Abtastzeit.

Dem Rechner stehen zur Berechnung des aktuellen Wertes  $u_k$  der Stellfolge die zurückliegenden Werte der Ausgangsfolge und der Stellfolge, also  $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots$  und  $u_{k-1}, u_{k-2}, \dots$  zur Verfügung. Der in ihm realisierte Regler ist daher ein zeitdiskreter Regler, der durch

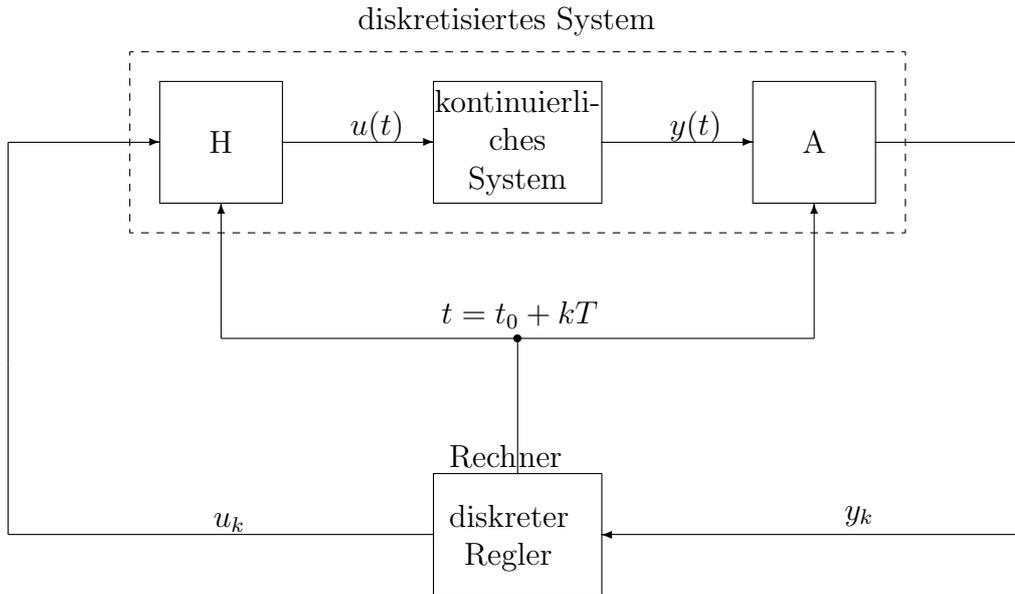


Abbildung 1.2: „Digitale“ Regelung eines kontinuierlichen Systems

eine Differenzgleichung der Form:

$$u_k = \mathcal{R}(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots) \quad (1.15)$$

beschrieben wird. Es ist daher sinnvoll, einen (für die digitale Regelung) passenden Regler von vornherein als (zeit-)diskreten Regler (Differenzgleichung) zu entwerfen, da dieser dann problemlos implementiert werden kann. Für den Entwurf eines diskreten Reglers und für die Analyse des Regelkreises ist es dementsprechend zweckmäßig, auch das System in einer zeitdiskreten Form darzustellen. Dies gelingt dadurch, dass man Halteglied, System und Abtaster (in Abbildung 1.2 gestrichelt eingerahmt) zu einem Gesamtsystem zusammenfasst.

**Definition 1** *Diskretisiertes System:*

Als mit der Abtastzeit  $T$  diskretisiertes System wird die Reihenschaltung von Halteglied, kontinuierlichem System und Abtaster bezeichnet.  $\square$

Eine nähere Beschreibung des diskretisierten Systems folgt im nächsten Kapitel.

### c) Struktur der Arbeit

In Kapitel 1 wurde anhand einer konkreten Regelungsaufgabe erläutert, warum eine eingehende Betrachtung der Diskretisierung kontinuierlicher Systeme sinnvoll erscheint.

In Kapitel 2 werden die betrachteten kontinuierlichen und diskretisierten Systeme beschrieben.

Das daran anschließende Kapitel 3 beschäftigt sich mit Steuerbarkeit. Hier wird zunächst

eine zweckmäßige Definition für die Systemeigenschaft Steuerbarkeit eingeführt. Anschließend wird gezeigt, dass Steuerbarkeit in diesem Sinne auch für das diskretisierte System erhalten bleibt, wenn die Abtastzeit hinreichend klein ist. Weiterhin wird auf die Steuerung in diskreter Zeit eingegangen und der Zusammenhang zwischen Steuerbarkeit in diskreter Zeit und „Regelbarkeit“ erläutert. Zum Abschluss des Kapitels wird, aufbauend auf das Ergebnis für kleine Abtastzeiten, ein Steuerbarkeitsmaß definiert, das zur Analyse der Steuerbarkeit des diskretisierten Systems auch für große Abtastzeiten geeignet ist.

In Kapitel 4 wird Beobachtbarkeit behandelt. Auch hier wird zunächst Beobachtbarkeit geeignet definiert. Dann wird, wiederum für kleine Abtastzeiten, gezeigt, dass Beobachtbarkeit bei Diskretisierung erhalten bleibt. Außerdem wird ein diskreter Beobachter angegeben und das Thema Ausgangsrückführung kurz behandelt. Abschließend wird ein Beobachtbarkeitsmaß definiert, das sich zur Analyse der Beobachtbarkeit eines diskretisierten Systems eignet, wenn zur Diskretisierung große Abtastzeiten verwendet werden.

Kapitel 5 gibt eine Einordnung in die bestehende Literatur, und Kapitel 6 rundet die Arbeit mit abschließenden Bemerkungen ab.

# Kapitel 2

## Beschreibung der betrachteten Systeme

### a) Kontinuierliches System

Betrachtet werden **zeitinvariante dynamische Systeme** im Zustandsraum der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= hx\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit dem Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang bzw. der Stellgröße  $u \in \mathbb{R}$  und der Ausgangsgröße  $y \in \mathbb{R}$ .

Zur Einfachheit der Beweise (siehe Kapitel 4) wird angenommen, dass der **Ausgang linear** in  $x$  ist, also  $h_0(x) = hx$ . Dies ist z. B. erfüllt, wenn der Ausgang eine der Zustandsgrößen ist (was in vielen Fällen durch eine Ähnlichkeitstransformation erreichbar ist), oder wenn  $y$  Zustandsgröße eines dynamischen Sensors ist, der in  $f$  mit modelliert wurde.

Es sei  $f(0, 0) = 0$ , d. h. das betrachtete System hat eine **Ruhelage** bei  $\{\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}\} = \{0, 0, 0\}$ .

Für die rechte Seite der Differentialgleichung wird **globale Lipschitzstetigkeit** angenommen. Das heißt, es gibt eine Konstante  $L > 0$ , so dass für alle  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, u' \in \mathbb{R}$  gilt

$$|f(x, u) - f(x', u')| \leq L[|x - x'| + |u - u'|].\tag{2.2}$$

Lokale Lipschitzstetigkeit der rechten Seite einer Differentialgleichung ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (siehe z. B. [23]). In der Praxis, wo Zustände üblicherweise physikalische Größen sind, ist meist nur ein beschränktes Gebiet im Zustandsraum relevant. Für ein solches beschränktes und abgeschlossenes Gebiet folgt aus der lokalen die globale Lipschitzstetigkeit in diesem Gebiet. Es ist also keine Einschränkung und dient der Übersichtlichkeit, wenn man globale Lipschitzstetigkeit

(gegebenenfalls unter Verwendung einer lipschitzstetigen Fortsetzung<sup>1</sup> außerhalb des zu betrachtenden Gebietes) von  $f$  in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  voraussetzt.

Für jede Steuerfunktion  $u(\cdot)$  aus einer zulässigen Menge  $\mathcal{U}$  von stückweise stetigen Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , jeden Anfangswert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und jeden Startzeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  gibt es dann eine eindeutige für alle  $t \in \mathbb{R}$  definierte Lösung  $\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$  mit

$$\Phi(t_0, t_0, x_0, u(\cdot)) = x_0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = f(\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)), u(t)) \quad , t \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Diese Lösung wird als **Zustandstrajektorie** bezeichnet. Sie ist eine Abbildung  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die Zustandstrajektorie gehe durch die Punkte  $(t, x)$  und  $(t_0, x_0)$ . Es gilt dann:

$$x = \Phi(t, t, x, u(\cdot)) \quad (2.5)$$

$$= \Phi(t, t, \Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot)) \quad (2.6)$$

$$= \Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad (2.7)$$

$$x_0 = \Phi(t_0, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad (2.8)$$

$$= \Phi(t_0, t_0, \Phi(t_0, t, x, u(\cdot)), u(\cdot)) \quad (2.9)$$

$$= \Phi(t_0, t, x, u(\cdot)) \quad (2.10)$$

Siehe hierzu Abbildung 2.1.

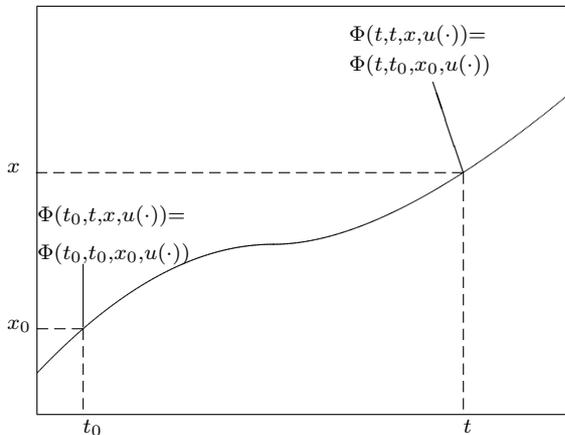


Abbildung 2.1: Um die Trajektorie festzulegen, kann jeder beliebige „Anfangspunkt“ als Bezugspunkt verwendet werden.

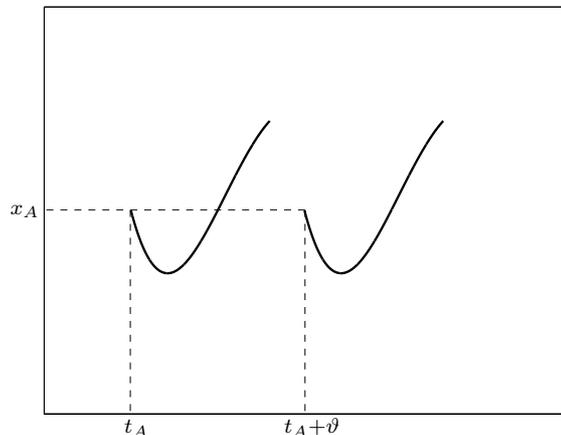


Abbildung 2.2: Zeitinvarianz: der Verlauf der Trajektorie wird durch Änderung des Anfangszeitpunktes nicht verändert, wenn der Verlauf des Eingangssignals ab dem jeweiligen Anfangszeitpunkt und auch der Anfangswert gleich bleiben.

<sup>1</sup>eine solche Fortsetzung ist immer möglich; siehe hierzu [24] S. 5 und die dort verwendeten Zitate

Aus der **Zeitinvarianz** des betrachteten Systems (d. h.,  $f$  ist nicht selbst Funktion von  $t$ ) folgt: Verschiebt man den Anfangszeitpunkt und das Eingangssignal um die Zeit  $\vartheta$ , nimmt die Trajektorie ab dem jeweiligen Anfangszeitpunkt denselben Verlauf. Das heißt, wenn  $t_A \rightarrow t_A + \vartheta$ ,  $\vartheta \in \mathbb{R}$  und  $u \rightarrow \tilde{u}$  mit  $\tilde{u}(t + \vartheta) = u(t)$ , dann ist  $\Phi(t, t_A, x_A, u(\cdot)) = \Phi(t + \vartheta, t_A + \vartheta, x_A, \tilde{u}(\cdot))$ . Siehe hierzu Abbildung 2.2.

Mithilfe der Zustandstrajektorie wird die **Ausgangstrajektorie** eingeführt. Sie ist eine Abbildung  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  und wird durch

$$\Psi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) := h\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad , t \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

definiert<sup>2</sup>. Wenn die Zustandstrajektorie durch die Punkte  $(t, x)$  und  $(t_0, x_0)$  geht, dann gilt für das Ausgangssignal:

$$y(t) = \Psi(t, t, x, u(\cdot)) \quad (2.12)$$

$$= \Psi(t, t, \Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot)) \quad (2.13)$$

$$= \Psi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad (2.14)$$

### b) Diskretisiertes System

Zu dem oben beschriebenen System nach Gleichung (2.1) und einer beliebigen Abtastzeit  $T \in \mathbb{R}^+$  existiert immer ein **diskretisiertes System** nach Definition 1. Abbildung 2.3

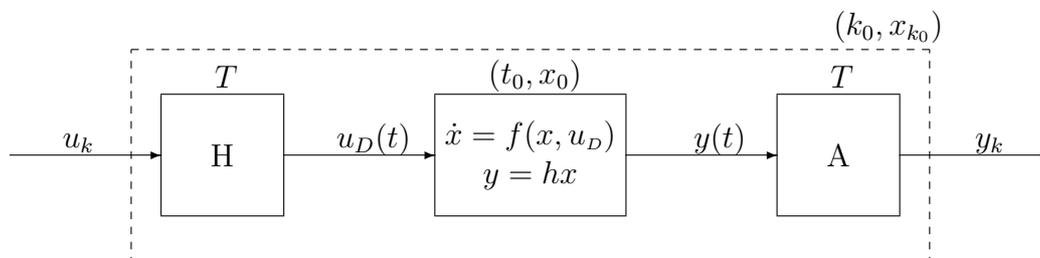


Abbildung 2.3: Diskretisiertes System

zeigt das diskretisierte System.

Bei der Diskretisierung wird ein **Halteglied 0. Ordnung** verwendet. Dieses erzeugt

<sup>2</sup>Die Ausgangstrajektorie ist das in Kapitel 1 nicht näher spezifizierte Ausgangssignal  $y(\cdot)$  des kontinuierlichen Systems.

aus der Steuerfolge  $\mathbf{u}$  ein stückweise konstantes Steuersignal  $u_D(\cdot)$ <sup>3</sup> mit

$$u_k \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u} := \{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}, k \in \mathbb{Z} \quad (2.16)$$

$$u_D(t) := u_k, t \in [t_0 + kT, t_0 + kT + T), t_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Im diskretisierten System wirkt dieses Steuersignal auf das kontinuierliche System, welches damit die Zustandstrajektorie  $\Phi(\cdot, t_0, x_0, u_D(\cdot))$  bzw. die Ausgangstrajektorie  $\Psi(\cdot, t_0, x_0, u_D(\cdot))$  erzeugt. Die Werte der Ausgangstrajektorie zu den Abtastzeitpunkten bilden die Elemente der Ausgangsfolge

$$y_k := \Psi(t_0 + kT, t_0, x_0, u_D(\cdot)). \quad (2.18)$$

Mit den Bezeichnungen

$$x_k := \Phi(t_0 + kT, t_0, x_0, u_D(\cdot)) \quad (2.19)$$

$$f_D(x_k, u_k) := \Phi(t_0 + kT + T, t_0 + kT, x_k, u_D(\cdot)) \quad (2.20)$$

erhält man eine **Zustandsdifferenzgleichung für das diskretisierte System**

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f_D(x_k, u_k) \\ y_k &= hx_k \end{aligned} \quad (2.21)$$

mit dem Zustand  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang bzw. der Stellgröße  $u_k \in \mathbb{R}$  und der Ausgangsgröße  $y_k \in \mathbb{R}$ .

$f_D$  ist wegen Gleichung (2.20) wohl definiert.

Der **Ausgang des diskretisierten Systems** ist **linear**, da der Ausgang des betrachteten kontinuierlichen Systems linear ist.

Das diskretisierte System hat eine **Ruhelage** bei  $\{\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}\} = \{0, 0, 0\}$ , da auch das betrachtete kontinuierliche System dort eine Ruhelage hat.

Die rechte Seite der Differenzgleichung ist **global lipschitzstetig**, da das kontinuierliche System global lipschitzstetig ist. Das heißt, es gibt eine Konstante  $L_D > 0$ , so dass für alle  $x_k, x'_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k, u'_k \in \mathbb{R}$  gilt

$$|f_D(x_k, u_k) - f_D(x'_k, u'_k)| \leq L_D[|x_k - x'_k| + |u_k - u'_k|]. \quad (2.22)$$

Dabei ergibt sich die Lipschitzkonstante des diskretisierten Systems  $L_D$  gemäß Lemma 2 aus der Lipschitzkonstanten des kontinuierlichen Systems und der Abtastzeit.

---

<sup>3</sup>Die Bezeichnung  $u_D(\cdot)$  dient der Unterscheidung des Steuersignals, das innerhalb der Diskretisierung verwendet wird, von einem beliebigen Steuersignal für das kontinuierliche System.

Für jede Steuerfolge  $\underline{u} := \{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$ , jeden „Startzeitpunkt“  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und jeden Anfangswert  $x_{k_0} \in \mathbb{R}^n$  hat das diskretisierte System eine eindeutige, für alle  $k \in \mathbb{Z}$  definierte Lösung  $\Phi_D(k, k_0, x_{k_0}, \underline{u})$  mit

$$\Phi_D(k_0, k_0, x_{k_0}, \underline{u}) = x_{k_0} \quad (2.23)$$

$$\Phi_D(k+1, k_0, x_{k_0}, \underline{u}) = f_D(\Phi_D(k, k_0, x_{k_0}, \underline{u}), u_k) \quad , k \in \mathbb{Z}. \quad (2.24)$$

Diese Lösung wird als **Zustandstrajektorie des diskretisierten Systems** bezeichnet. Sie ist eine Abbildung  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $\mathcal{U}_D$  die Menge der betrachteten Steuerfolgen  $\underline{u}$  ist. Für die Zustandstrajektorie des diskretisierten Systems gelten die oben vorgestellten Eigenschaften der Zustandstrajektorie des kontinuierlichen Systems sinngemäß.

Mithilfe der Zustandstrajektorie wird die **Ausgangstrajektorie des diskretisierten Systems**  $\Psi_D(k, k_0, x_{k_0}, u(\cdot))$  eingeführt. Sie ist eine Abbildung  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_D \rightarrow \mathbb{R}$  und wird durch

$$\Psi_D(k, k_0, x_{k_0}, \underline{u}) := h\Phi_D(k, k_0, x_{k_0}, \underline{u}) \quad (2.25)$$

definiert<sup>4</sup>. Für die Ausgangstrajektorie des diskretisierten Systems gelten entsprechend die oben vorgestellten Eigenschaften der Ausgangstrajektorie des kontinuierlichen Systems sinngemäß.

Es besteht folgender **Zusammenhang** zwischen den Trajektorien des kontinuierlichen und des diskretisierten Systems:

Sei  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  die Anfangsbedingung des kontinuierlichen Systems und sei  $(k_0, x_{k_0}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n$  eine dazugehörige Anfangsbedingung des diskretisierten Systems, d. h.  $\Phi(t_0 + k_0T, t_0, x_0, u_D(\cdot)) = x_{k_0}$ , dann gilt:

$$\Phi_D(0, k_0, x_{k_0}, \underline{u}) = \Phi(t_0, t_0 + k_0T, x_{k_0}, u_D(\cdot)) \quad (2.26)$$

$$= \Phi(t_0, t_0 + k_0T, \Phi(t_0 + k_0T, t_0, x_0, u_D(\cdot)), u_D(\cdot)) \quad (2.27)$$

$$= \Phi(t_0, t_0, x_0, u_D(\cdot)) \quad (2.28)$$

$$= x_0 \quad (2.29)$$

$$\Phi_D(k, 0, x_0, \underline{u}) = \Phi(t_0 + kT, t_0, x_0, u_D(\cdot)). \quad (2.30)$$

---

<sup>4</sup>Die Ausgangstrajektorie des diskretisierten Systems heißt in Kapitel 1 Ausgangsfolge  $y$ .

# Kapitel 3

## Steuerbarkeit

### 3.1 Definition der Steuerbarkeit

Unter dem Begriff Steuerbarkeit eines nichtlinearen Systems versteht man ganz allgemein, welche Möglichkeiten der Beeinflussung der Trajektorie<sup>1</sup> durch das Eingangssignal (d. h.  $\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$  durch  $u(\cdot)$ ) existieren und welche Grenzen ihr gesetzt sind. Dementsprechend gibt es in der Literatur zahlreiche unterschiedliche Definitionen von Steuerbarkeit (s. hierzu und zur Einordnung der hier verwendeten Definition Abschnitt 5.1). Eine an der Praxis orientierte Möglichkeit besteht darin, Steuerbarkeit als das zu definieren, was man als Bedingung benötigt, damit konkrete steuer- und regelungstechnische Aufgaben lösbar sind. Im vorliegenden Fall ist dies die Regelung an der Ruhelage. In Abschnitt 3.3 wird sich zeigen, dass dafür folgende Definition zweckmäßig ist.

**Definition 2** *Steuerbarkeit des kontinuierlichen Systems:*

Das System aus Abschnitt 2a mit Gleichung (2.1) heißt (exponentiell in den Nullpunkt) steuerbar, wenn es Konstanten  $c \geq 1$ ,  $a > 0$  gibt, so dass zu jedem Anfangspunkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  eine Steuerfunktion  $u(\cdot) \in \mathbb{C}_{[t_0, \infty)}^1$ <sup>2</sup> existiert, so dass gilt

$$|u(t)|, |\dot{u}(t)|, |\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))| \leq c e^{-a(t-t_0)} |x_0|, \quad t \geq t_0. \quad (3.1)$$

□

Auch das diskretisierte System kann nur an seiner Ruhelage stabilisiert werden, wenn es in geeigneter Weise steuerbar ist.<sup>3</sup>

**Definition 3** *Steuerbarkeit des diskretisierten Systems:*

Das mit der Abtastzeit  $T > 0$  diskretisierte System aus Abschnitt 2b mit Gleichung (2.21) heißt (exponentiell in den Nullpunkt) steuerbar, wenn es Konstanten  $c_D \geq 1$ ,  $a_D > 0$  gibt,

---

<sup>1</sup>Im Zusammenhang mit Steuerung ist unter „Trajektorie“ immer die Zustandstrajektorie zu verstehen.

<sup>2</sup>s. Anhang B

<sup>3</sup>Diese Definition von Steuerbarkeit für das diskretisierte System ist ein Sonderfall der in [25] verwendeten Definition; s. auch Abschnitt 5.1

so dass zu jedem Anfangspunkt  $(k_0, x_{k_0}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n$  eine Steuerfolge  $\underline{u} := \{u_k\}_{k=k_0}^\infty$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$  existiert, so dass gilt

$$|u_k|, |\Phi_D(k, k_0, x_{k_0}, \underline{u})| \leq c_D e^{-a_D(k-k_0)T} |x_{k_0}|, \quad k \geq k_0. \quad (3.2)$$

□

Bei der Diskretisierung ändert sich aus Sicht des kontinuierlichen Systems eingangsseitig die zu verwendenden Eingangssignale. Statt beliebiger Eingangssignale  $u(\cdot) \in \mathbb{C}^1$  stehen nach der Diskretisierung nur noch vom Halteglied erzeugte stückweise konstante Eingangssignale  $u_D(\cdot)$  zur Verfügung. Es stellt sich daher die Frage, ob und ggf. unter welchen Voraussetzungen aus der Steuerbarkeit des kontinuierlichen Systems die Steuerbarkeit des diskretisierten Systems folgt (Erhalt der Steuerbarkeit bei Diskretisierung).

## 3.2 Erhaltung der Steuerbarkeit

Der folgende Satz und sein Beweis sind das erste zentrale Ergebnis dieser Arbeit.

**Satz 1** *Wenn das kontinuierliche System aus Abschnitt 2a <sup>4</sup> steuerbar ist, dann gibt es stets ein  $\bar{T} > 0$ , so dass auch das mit der Abtastzeit  $T \in (0, \bar{T}]$  diskretisierte System aus Abschnitt 2b steuerbar ist.* □

Bevor der Satz im Detail bewiesen wird, wird hier zunächst der Grundgedanke des Beweises skizziert:

Man betrachte einen beliebigen Anfangspunkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und eine passende Steuerfunktion  $u(\cdot) \in \mathbb{C}^1_{[t_0, \infty)}$ , die den Zustand des Systems gemäß Definition 2 in den Ursprung überführt. Von diesem (Steuerungs-)Vorgang wird nur das Intervall  $[t_0, t_0 + \Theta]$  betrachtet, wobei  $\Theta > 0$  mindestens so groß sei, dass  $ce^{-a\Theta} \leq \frac{1}{2}$  <sup>5</sup> ist. Die Trajektorie  $\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$  des Systems nähert sich in diesem Intervall gemäß Gleichung (3.1) exponentiell dem Ursprung, und am Ende des Intervalls ist der Abstand vom Ursprung höchstens noch  $\frac{|x_0|}{2}$ .

Zur Einfachheit sei  $\Theta$  ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit  $T$  ( $\Theta = mT$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ). Für das mit  $T$  diskretisierte System entspricht  $(t_0, x_0)$  dem Anfangspunkt  $(0, x_0)$ . Man verwende für das diskretisierte System mit dem Anfangspunkt  $(0, x_0)$  die diskrete Steuerfolge  $\underline{u} := \{u_k\}_{k=0}^{m-1}$ ,  $u_k := u(t_0 + kT)$ . Aus dieser wird vom Halteglied die stückweise konstante Steuerfunktion  $u_D(\cdot)$ ,  $u_D(t) := u_k$ ,  $t \in [t_0 + kT, t_0 + kT + T)$  für das System erzeugt. Die zugehörige Trajektorie des Systems ist  $\Phi(t, t_0, x_0, u_D(\cdot))$ .

Aus der Lipschitzstetigkeit des Systems lässt sich folgern, dass der Abstand zwischen  $\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$  und  $\Phi(t, t_0, x_0, u_D(\cdot))$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + \Theta)$  proportional zu  $\|u(t) -$

<sup>4</sup>Da für Steuerbarkeit nur die Zustände und nicht der Ausgang des Systems relevant sind, wird hier die Linearität des Ausgangs nicht benötigt.

<sup>5</sup>Es wäre auch möglich  $ce^{-a\Theta} \leq \text{const}$ ,  $\text{const} < 1$  zu wählen

$u_D(t)|_{t \in [t_0, t_0 + \Theta]}$  beschränkt ist.  $\|u(t) - u_D(t)\|_{t \in [t_0, t_0 + \Theta]}$  wiederum ist proportional zu  $T|x_0|$  beschränkt. Für hinreichend kleine  $T$  ist somit  $|\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) - \Phi(t, t_0, x_0, u_D(\cdot))| \leq \frac{|x_0|}{4}$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + \Theta]$ , und folglich ist  $|\Phi(t_0 + \Theta, t_0, x_0, u_D(\cdot))| \leq \frac{3}{4}|x_0|$ . Damit ist die Annäherung von  $\Phi(t, t_0, x_0, u_D(\cdot))$  an den Ursprung in dem betrachteten endlichen Intervall gezeigt.

Der so erreichte Endzustand  $\Phi(t_0 + \Theta, t_0, x_0, u_D(\cdot))$  wird im nächsten Zeitintervall ( $[t_0 + \Theta, t_0 + 2\Theta]$ ) wieder als neuer Anfangszustand betrachtet. Man erhält schließlich durch rekursive Anwendung dieses Ergebnisses die (zeitlich) unbeschränkte Fortsetzung der Trajektorie und den Nachweis der Existenz einer Steuerfolge für das diskretisierte System gemäß Definition 3.

### Beweis von Satz 1

Sei  $T > 0$  eine beliebige Abtastzeit. Ferner sei  $m$  die kleinste natürliche Zahl, für die  $ce^{-amT} \leq \frac{1}{2}$  ist, mit  $a, c$  aus Ungleichung (3.1). Es wird definiert  $\Theta := mT$ , und  $\vartheta > 0$  sei so gewählt, dass  $ce^{-a\vartheta} = \frac{1}{2}$  ist (und daher  $\Theta \in [\vartheta, \vartheta + T)$ ).

Zu einem beliebigen Anfangspunkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  des Systems sei  $u(\cdot) \in \mathbb{C}_{[t_0, \infty)}^1$  eine exponentielle Steuerung nach Ungleichung (3.1). Für die zugehörige Trajektorie wird im Folgenden die Abkürzung

$$\xi(t) := \Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad (3.3)$$

verwendet. Für sie gilt entsprechend Ungleichung (3.1)

$$|\xi(t)| \leq ce^{-a(t-t_0)}|x_0|. \quad (3.4)$$

Zum späteren Vergleich wird zusätzlich aus  $u(\cdot)$  zunächst durch Abtastung die (endliche) Steuerfolge

$$\underline{u} := \{u_k\}_{k=0}^{m-1}, \quad u_k := u(t_0 + kT) \quad (3.5)$$

gebildet. Gibt man diese auf das diskretisierte System, so erzeugt das Halteglied daraus auf dem Intervall  $[t_0, t_0 + mT)$  die stückweise konstante Steuerfunktion

$$u_D(t) := u_k, \quad t \in [t_0 + kT, t_0 + (k+1)T) \quad (3.6)$$

für das System. Diese liefert als Trajektorie

$$\xi_D(t) := \Phi(t, t_0, x_0, u_D(\cdot)), \quad t \in [t_0, t_0 + \Theta]. \quad (3.7)$$

Die beiden Trajektorien werden nun auf dem Intervall  $[t_0, t_0 + \Theta]$  verglichen. Dazu verwendet man folgende Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f(\xi, u) & , \quad \xi(t_0) &= x_0 \\ \dot{\xi}_D &= f(\xi_D, u_D) & , \quad \xi_D(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Für den Unterschied ergibt sich nach Auswertung der Lipschitzeigenschaft des Systems die Differentialungleichung

$$|(\xi - \xi_D)'| \leq L[|\xi - \xi_D| + |u - u_D|], (\xi(t_0) - \xi_D(t_0)) = 0. \quad (3.9)$$

Mit Lemma 1 auf Seite 53 und wegen  $t \in [t_0, t_0 + \Theta]$ ,  $\Theta \in [\vartheta, \vartheta + T]$  folgt daraus:

$$|\xi(t) - \xi_D(t)| \leq \int_{t_0}^t e^{L(t-\tau)} L |u(\tau) - u_D(\tau)| d\tau \quad (3.10)$$

$$\leq e^{L(t-t_0)} L \int_{t_0}^t |u(\tau) - u_D(\tau)| d\tau \quad (3.11)$$

$$\leq e^{L(\vartheta+T)} L \int_{t_0}^{t_0+\Theta} |u(\tau) - u_D(\tau)| d\tau, \quad t \in [t_0, t_0 + \Theta] \quad (3.12)$$

Nun wird  $|u - u_D|$  zunächst auf einem Abtastintervall  $[t_0 + kT, t_0 + kT + T) \subset [t_0, t_0 + \Theta]$  betrachtet. Dazu wird im Schritt von (3.16) nach (3.17) die Ungleichung (3.1) verwendet. Für  $\tau \in [t_0 + kT, t_0 + kT + T)$  gilt:

$$|u(\tau) - u_D(\tau)| \quad (3.13)$$

$$= |[u(\tau) - u_D(\tau)] - \underbrace{[u(t_0+kT) - u_D(t_0+kT)]}_0| \quad (3.14)$$

$$= \left| \int_{t_0+kT}^{\tau} [u(s) - u_D(s)]' ds \right| \quad (3.15)$$

$$= \int_{t_0+kT}^{\tau} |\dot{u}(s)| ds \quad (3.16)$$

$$\leq \int_{t_0+kT}^{\tau} ce^{-a(s-t_0)} ds |x_0| \quad (3.17)$$

$$= \frac{c}{a} [e^{-akT} - e^{-a(\tau-t_0)}] |x_0| \quad (3.18)$$

$$= \frac{c}{a} e^{-akT} [1 - e^{-a(\tau-kT-t_0)}] |x_0| \quad (3.19)$$

$$\leq \frac{c}{a} e^{-akT} [1 - e^{-aT}] |x_0| \quad (3.20)$$

Das Integral über ein Abtastintervall hat dann folgende Abschätzung

$$\int_{t_0+kT}^{t_0+kT+T} |u(\tau) - u_D(\tau)| d\tau \leq T \frac{c}{a} e^{-akT} [1 - e^{-aT}] |x_0|. \quad (3.21)$$

Mit  $\Theta = mT$  folgt für das Integral über das Intervall  $[t_0, t_0 + \Theta)$

$$\int_{t_0}^{t_0+\Theta} |u(\tau) - u_D(\tau)| d\tau \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c}{a} T [1 - e^{-aT}] e^{-akT} |x_0| \quad (3.22)$$

$$= \frac{c}{a} T [1 - e^{-aT}] \sum_{k=0}^{m-1} e^{-akT} |x_0| \quad (3.23)$$

$$= \frac{c}{a} T [1 - e^{-aT}] \frac{1 - e^{-amT}}{1 - e^{-aT}} |x_0| \quad (3.24)$$

$$= \frac{c}{a} T [1 - e^{-amT}] |x_0| \quad (3.25)$$

$$\leq \frac{c}{a} T |x_0|. \quad (3.26)$$

Aus (3.12) und (3.26) ergibt sich

$$|\xi(t) - \xi_D(t)| \leq e^{L(\vartheta+T)} L \frac{c}{a} T |x_0| \quad , t \in [t_0, t_0 + \Theta] \quad (3.27)$$

Dieses Zwischenergebnis gilt für alle  $T > 0$ .

Sei  $\bar{T}$  so bestimmt, dass gilt

$$e^{L(\vartheta+\bar{T})} L \frac{c}{a} \bar{T} = \frac{1}{4}. \quad (3.28)$$

Für alle Abtastzeiten  $T \in (0, \bar{T}]$  folgt dann aus (3.27) und (3.28)

$$|\xi(t) - \xi_D(t)| \leq \frac{1}{4} |x_0|, \quad t \in [t_0, t_0 + \Theta]. \quad (3.29)$$

Für  $\xi_D$  ergibt sich daraus mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Abschätzung für  $\xi$  nach Ungleichung (3.4)

$$|\xi_D(t)| \leq |\xi(t)| + |\xi(t) - \xi_D(t)| \quad , t \in [t_0, t_0 + \Theta] \quad (3.30)$$

$$\leq [ce^{-a(t-t_0)} + \frac{1}{4}] |x_0| \quad (3.31)$$

$$\leq (c + \frac{1}{4}) |x_0|. \quad (3.32)$$

und (mit  $\vartheta \leq \Theta < \vartheta + \bar{T}$ )

$$|\xi_D(t_0 + \Theta)| \leq [ce^{-a\Theta} + \frac{1}{4}] |x_0| \quad (3.33)$$

$$\leq [\frac{1}{2} + \frac{1}{4}] |x_0| \quad (3.34)$$

$$= \frac{3}{4} |x_0| \quad (3.35)$$

Die im Intervall  $[t_0, t_0 + \Theta]$  angestellten Betrachtungen gelten für alle Anfangspunkte  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Daher kann man im Intervall  $[t_0 + \Theta, t_0 + 2\Theta]$ , ausgehend von dem bereits erreichten Punkt  $(t_0 + \Theta, \xi_D(t_0 + \Theta))$ , exakt dieselbe Betrachtung anwenden, und erhält so eine Fortsetzung von  $u_D, \xi_D$  in diesem Intervall usw..

Auf diese Weise folgt für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  zunächst aus Ungleichung (3.35) die Differenzengleichung

$$|\xi_D(t_0 + i\Theta + \Theta)| \leq \frac{3}{4}|\xi_D(t_0 + i\Theta)|, \quad |\xi_D(t_0)| = |x_0| \quad (3.36)$$

und aus dieser rekursiv die Abschätzung

$$|\xi_D(t_0 + i\Theta)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^i |x_0|, \quad (3.37)$$

und weiter aus (3.32) die Ungleichung

$$|\xi_D(t)| \leq \left[c + \frac{1}{4}\right]|\xi_D(t_0 + i\Theta)|, \quad t \in [t_0 + i\Theta, t_0 + i\Theta + \Theta] \quad (3.38)$$

$$\leq \left[c + \frac{1}{4}\right]\left(\frac{3}{4}\right)^i |x_0| \quad (3.39)$$

Mit der Wahl von  $a_D$  so, dass gilt

$$e^{-a_D(\vartheta+\bar{T})} = \frac{3}{4} \leq e^{-a_D\Theta}, \quad (3.40)$$

erhält man für alle  $i \in \mathbb{N}_0$

$$|\xi_D(t)| \leq \left(c + \frac{1}{4}\right)e^{-a_D i\Theta} |x_0|, \quad t \in [t_0 + i\Theta, t_0 + i\Theta + \Theta] \quad (3.41)$$

$$= \left(c + \frac{1}{4}\right)e^{-a_D(i\Theta+\Theta-\Theta)} |x_0| \quad (3.42)$$

$$\leq \left(c + \frac{1}{4}\right)e^{a_D\Theta} e^{-a_D(t-t_0)} |x_0| \quad (3.43)$$

$$\leq \left(c + \frac{1}{4}\right)e^{a_D(\vartheta+\bar{T})} e^{-a_D(t-t_0)} |x_0|. \quad (3.44)$$

wobei im zweiten Schritt die Abschätzung  $-(i\Theta + \Theta) \leq -(t - t_0)$  verwendet wurde. Diese Ungleichung gilt für jedes  $i \in \mathbb{N}_0$ , und die rechte Seite ist unabhängig von  $i$ . Wegen  $\xi_D(t) = \Phi(t, t_0, x_0, u_D(\cdot))$  folgt

$$|\Phi(t, t_0, x_0, u_D(\cdot))| \leq \left[c + \frac{1}{4}\right]e^{a_D(\vartheta+\bar{T})} e^{-a_D(t-t_0)} |x_0|, \quad t \geq t_0. \quad (3.45)$$

Mit Gleichung (2.30) ergibt sich daraus

$$|\Phi_D(k, 0, x_0, \underline{u})| = |\Phi(t_0 + kT, t_0, x_0, u_D(\cdot))| \quad (3.46)$$

$$\leq \left[c + \frac{1}{4}\right]e^{a_D(\vartheta+\bar{T})} e^{-a_D kT} |x_0|, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.47)$$

Für beliebige Anfangspunkte  $(k_0, x_{k_0}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n$  des diskretisierten Systems erhält man mit  $t'_0 := t_0 + k_0 T$

$$|\Phi_D(k, k_0, x_{k_0}, \underline{u})| = |\Phi(t_0 + kT, t_0 + k_0 T, x_{k_0}, u_D(\cdot))| \quad (3.48)$$

$$= |\Phi(t'_0 + (k - k_0)T, t'_0, x_{k_0}, u_D(\cdot))|. \quad (3.49)$$

Da die gesamte Betrachtung für einen beliebigen Anfangspunkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  durchgeführt werden kann, gilt sie auch insbesondere für den Anfangspunkt  $(t'_0, x_{k_0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , woraus sich die gewünschte Ungleichung für  $|\Phi_D(k, k_0, x_{k_0}, \underline{u})|$  ergibt.

Für die Steuerfunktion  $u_D$  gilt

$$|u_D(t)| = |u(t_0 + kT)|, t \in [t_0 + kT, t_0 + kT + T], k = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (3.50)$$

$$\leq ce^{-akT}|x_0| \quad (3.51)$$

$$\leq c|x_0|. \quad (3.52)$$

Diese Abschätzung ist unabhängig von  $k$ . Daher gilt sie für alle  $k = 0, 1, \dots, m - 1$  und folglich für alle  $t \in [t_0, t_0 + \Theta)$ . Die Steuerfunktion wird so fortgesetzt, dass im darauf folgenden Intervall gilt

$$|u_D(t)| \leq c|\xi_D(t_0 + \Theta)|, t \in [t_0 + \Theta, t_0 + 2\Theta). \quad (3.53)$$

usw..

So erhält man allgemein

$$|u_D(t)| \leq c|\xi_D(t_0 + i\Theta)|, t \in [t_0 + i\Theta, t_0 + (i + 1)\Theta). \quad (3.54)$$

Andererseits ist

$$|\xi_D(t_0 + i\Theta)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^i |x_0|, i \in \mathbb{N}_0 \quad (3.55)$$

woraus sich

$$|u_D(t)| \leq c\left(\frac{3}{4}\right)^i |x_0|, t \in [t_0 + i\Theta, t_0 + i\Theta + \Theta) \quad (3.56)$$

$$\leq c\left(\frac{3}{4}\right)^i |x_0|, t \in [t_0 + i\Theta, t_0 + i\Theta + \Theta) \quad (3.57)$$

ergibt. Mit den gleichen Umformungen wie für die Trajektorie (Gleichung (3.40) - Gleichung (3.44)) erhält man entsprechend

$$|u_D(t)| \leq ce^{a_D(\vartheta + \bar{T})} e^{-a_D(t-t_0)} |x_0|, t \geq t_0. \quad (3.58)$$

Daraus folgt mit  $|u_k| = |u(t_0 + kT)|$  die nachzuweisende Ungleichung für die Steuerfolge. Damit ist Satz 1 mit  $a_D$  wie oben und  $c_D := [c + \frac{1}{4}]e^{a_D(\vartheta + \bar{T})}$  bewiesen.  $\square$

### 3.2.1 Simulationsbeispiel

Um den Beweis zu veranschaulichen, wird das nichtlineare Beispiel

$$\dot{x} = \sin(x) + u \quad (3.59)$$

mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $u \in \mathbb{R}$  betrachtet. Dieses System hat eine Ruhelage bei  $\{\bar{u}, \bar{x}\} = \{0, 0\}$ . Diese Ruhelage ist instabil ( $\frac{df}{dx}|_{x=0} = 1$ ). Von einem beliebigen Anfangspunkt  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  kann der Zustand des Systems mit der Steuerung

$$u(t) = -\sin(e^{-(t-t_0)}x_0) - e^{-(t-t_0)}x_0 \quad (3.60)$$

exponentiell in die Ruhelage  $\{\bar{u}, \bar{x}\} = \{0, 0\}$  überführt werden. Mit dieser Steuerung ergibt sich

$$|\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))| = e^{-(t-t_0)}|x_0| \quad (3.61)$$

$$|u(t)| = |\sin(e^{-(t-t_0)}x_0) + e^{-(t-t_0)}x_0| \quad (3.62)$$

$$\leq |\sin(e^{-(t-t_0)}x_0)| + |e^{-(t-t_0)}x_0| \quad (3.63)$$

$$\leq 2e^{-(t-t_0)}|x_0| \quad (3.64)$$

$$|\dot{u}(t)| = |-\cos(e^{-(t-t_0)}x_0)e^{-(t-t_0)}x_0 - e^{-(t-t_0)}x_0| \quad (3.65)$$

$$\leq |(\cos(e^{-(t-t_0)}x_0) + 1)e^{-(t-t_0)}x_0| \quad (3.66)$$

$$\leq 2e^{-(t-t_0)}|x_0|. \quad (3.67)$$

Daher gilt für dieses System die Ungleichung (3.1) mit  $c = 2$  und  $a = 1$ .

Der Anfangswert des kontinuierlichen Systems sei beispielsweise  $(t_0, x_0) = (0, 1)$ , der des diskretisierten  $(k_0, x_{k_0}) = (0, 1)$ . Für  $t$  betrachtet man das Intervall  $[0, \Theta]$ . Damit am Ende des Intervalls  $|\Phi(\Theta, 0, 1, u(\cdot))| \leq \frac{1}{2}|1|$  ist, wird  $2e^{-\Theta} \leq \frac{1}{2}$  benötigt. Andererseits soll  $\Theta$  ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit  $T$  sein. Für die Abtastzeiten  $T = 0.2, 0.5, 1$  ist  $\Theta = 2$  eine geeignete Wahl. Auf dem Intervall  $[0, \Theta]$  wird als diskrete Steuerung (mit  $t_0 = 0$ ) definiert

$$u_k := u(kT) \quad (3.68)$$

$$u_D(t) := u_k, t \in [kT, kT + T). \quad (3.69)$$

Die Zustandstrajektorie des diskretisierten Systems ist

$$\Phi(t, 0, 1, u_D(\cdot)). \quad (3.70)$$

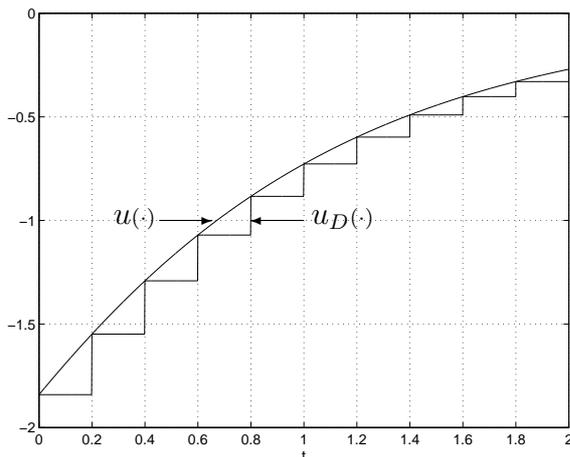


Abbildung 3.1: Steuersignal  $u$  und  $u_D$  stetig und stückweise konstant

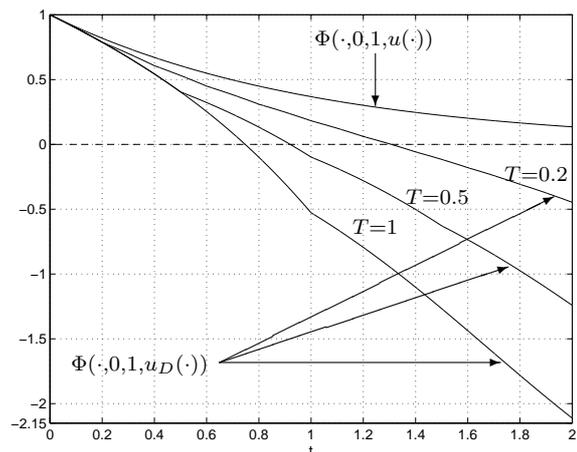


Abbildung 3.2: Trajektorien des mit  $u(\cdot)$  gesteuerten Systems und des mit  $u_D(\cdot)$  gesteuerten Systems für verschiedene Abtastzeiten.

Für  $t \in [0, \Theta)$  wird in Abbildung 3.1 das glatte Steuersignal  $u(\cdot)$  sowie das stückweise konstante Steuersignal  $u_D(\cdot)$  (das innerhalb des diskretisierten Systems verwendet wird) gezeigt. In Abbildung 3.2 werden die gesteuerten Trajektorien  $\Phi(t, 0, 1, u(\cdot))$  und  $\Phi(t, 0, 1, u_D(\cdot))$  (letztere für verschiedene Abtastzeiten) abgebildet.

Der Wert der Trajektorie des diskretisierten Systems zum Zeitpunkt  $\Theta$  unterscheidet sich umso weniger vom Wert der Trajektorie des kontinuierlichen Systems, je kleiner die Abtastzeit wird. Hat die Trajektorie des kontinuierlichen Systems auf dem Intervall  $\Theta$  (betragsmäßig) einen Abstieg, wird auch die Trajektorie des diskretisierten Systems (betragsmäßig) einen Abstieg haben, wenn die Abtastzeit klein genug ist.

Die Fortsetzung  $\Phi(t, 0, 1, u_D(\cdot))$  für  $t \geq 2$  erhält man, indem man Intervalle der Länge  $\Theta = 2$  aneinander hängt. Der Endwert des diskretisierten Systems auf dem Vorgängerintervall wird dabei als Anfangszustand (des kontinuierlichen und des diskretisierten Systems) auf dem aktuellen Intervall betrachtet. Passend zu diesem Anfangszustand wird (auf dem aktuellen Intervall)  $u_D(\cdot)$  gebildet. Daher weist  $\Phi(\cdot, 0, 1, u_D(\cdot))$  Knicke bei Vielfachen von  $\Theta$  auf. Die Abbildungen 3.3 bzw. 3.4 zeigen die Fortsetzung von  $u_D$  bzw.  $\Phi(\cdot, 0, 1, u_D(\cdot))$ , sowie die jeweils relevanten Stücke von  $u$  bzw.  $\Phi(\cdot, 0, 1, u(\cdot))$ .

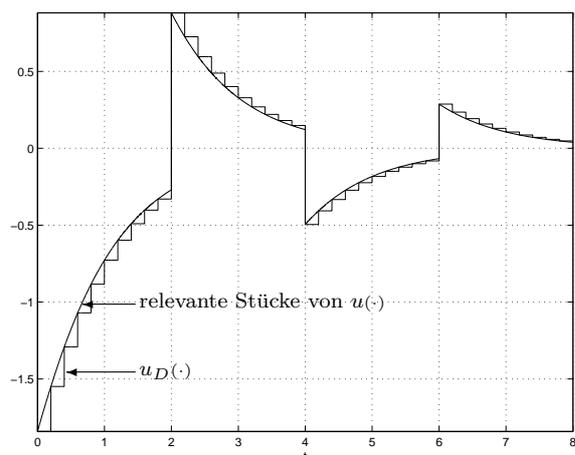


Abbildung 3.3: Steuersignale  $u$  und  $u_D$ ,  $\Theta = 2$ ,  $T = 0.2$ .

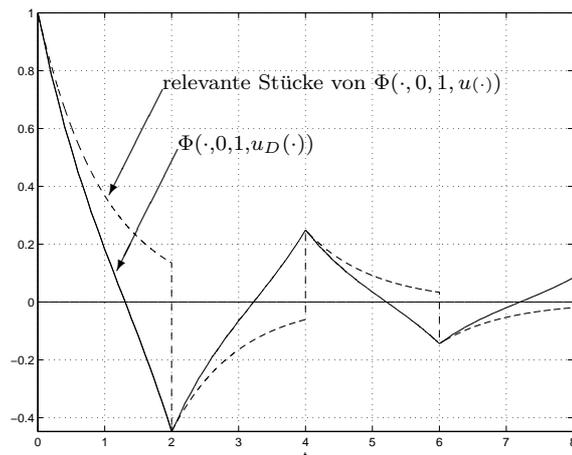


Abbildung 3.4: Trajektorienfortsetzung  $\Theta = 2$ ,  $T = 0.2$ .

### 3.3 Steuerbarkeit impliziert „Regelbarkeit“

Betrachtet wird das diskretisierte System aus Abschnitt 2b, also

$$x_{k+1} = f_D(x_k, u_k) \tag{3.71}$$

$$y_k = hx_k. \tag{3.72}$$

Wenn dieses System steuerbar ist, dann gibt es immer auch einen (diskreten) Regler, der es stabilisiert und den Zustand in den Ursprung überführt (s. [25] Theorem 1, Kap. 3 und

Korollar 1, Kap. 3, sowie [26]). Die Herleitung wird im Folgenden wiedergegeben.

Zunächst wird der Anfangspunkt  $(0, x_0)$  für das diskretisierte System betrachtet, also  $(k_0, x_{k_0}) = (0, x_0)$ .

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Für eine beliebige Steuerfolge  $\underline{u} := \{u_k\}_{k=0}^\infty$  lautet die Trajektorie des Systems dann  $\Phi_D(k, 0, x_0, \underline{u})$ . Es gilt

$$\Phi_D(0, 0, x_0, \underline{u}) = x_0 \quad (3.73)$$

$$\Phi_D(k+1, 0, x_0, \underline{u}) = f_D(\Phi_D(k, 0, x_0, \underline{u}), u_k). \quad (3.74)$$

Man definiert <sup>6</sup>  
nun  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$V(x_0) := \inf_{\underline{u}} \sum_{k=0}^{\infty} l(\Phi_D(k, 0, x_0, \underline{u}), u_k) \quad (3.75)$$

wobei  $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine positiv definite Funktion ist.  $V(x_0)$  wird nun umgeformt. Zunächst schreibt man das erste Summenglied außerhalb der Summe

$$V(x_0) = \inf_{\underline{u}} \{l(x_0, u_0) + \sum_{k=1}^{\infty} l(\Phi_D(k, 0, x_0, \underline{u}), u_k)\} \quad (3.76)$$

Aufgrund des Bellmanschen Optimalitätsprinzips, das besagt, dass jedes Endstück einer optimalen Trajektorie für sich optimal ist, erhält man mit  $\underline{u}' := \{u_k\}_{k=1}^\infty$ ,

$$V(x_0) = \inf_{u_0} \left[ l(x_0, u_0) + \min_{\underline{u}'} \sum_{k=1}^{\infty} l(\Phi_D(k, 0, x_0, \underline{u}), u_k) \right] \quad (3.77)$$

Außerdem gilt wegen Gleichung (3.74)

$$\Phi_D(1, 0, x_0, \underline{u}) = f_D(x_0, u_0) \quad (3.78)$$

weshalb sich

$$V(x_0) = \inf_{u_0} [l(x_0, u_0) + V(f_D(x_0, u_0))] \quad (3.79)$$

ergibt. Für das optimale  $u_0$  <sup>7</sup>, hier mit  $u_0^\diamond$  bezeichnet, gilt dann

$$V(f_D(x_0, u_0^\diamond)) - V(x_0) = -l(x_0, u_0^\diamond). \quad (3.80)$$

---

<sup>6</sup>Für die Existenz der nachstehenden Summe ist die in dieser Arbeit verwendete Definition von Steuerbarkeit des diskretisierten Systems eine hinreichende Bedingung.

<sup>7</sup>Es wird hier angenommen, dass die oben stehende Funktion ein Minimum hat, das auch erreicht wird. Andernfalls müsste man mit dem Infimum arbeiten, wodurch der Schreibaufwand erheblich kompliziert würde, aber keine grundlegend neue Erkenntnis erreicht wird.

Die eben angestellten Überlegungen können für jede beliebige Wahl von  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  durchgeführt werden. Das heißt, zu jeder beliebigen Wahl von  $x_0$  gibt es ein optimales  $u_0^\circ(x_0)$ , so dass Gleichung (3.80) gilt. Wegen der Zeitinvarianz des betrachteten Systems können die obigen Überlegungen zu jedem beliebigen Zeitpunkt durchgeführt werden: Man erhält den gleichen Wert  $u_0^\circ(x_0)$ , egal zu welchem Zeitpunkt man die Überlegungen durchführt. Daraus folgt: Wenn man als Regelgesetz für das diskretisierte System die Zustands-Vektor-Rückführung

$$u_k = K(x_k) \quad , K(\cdot) = u_0^\circ(\cdot) \quad (3.81)$$

verwendet, erhält man einen Regelkreis nach Abb. 3.5, und dieser Regelkreis ist asymptotisch stabil, weil  $V$  Lyapunov-Funktion für den Regelkreis ist.

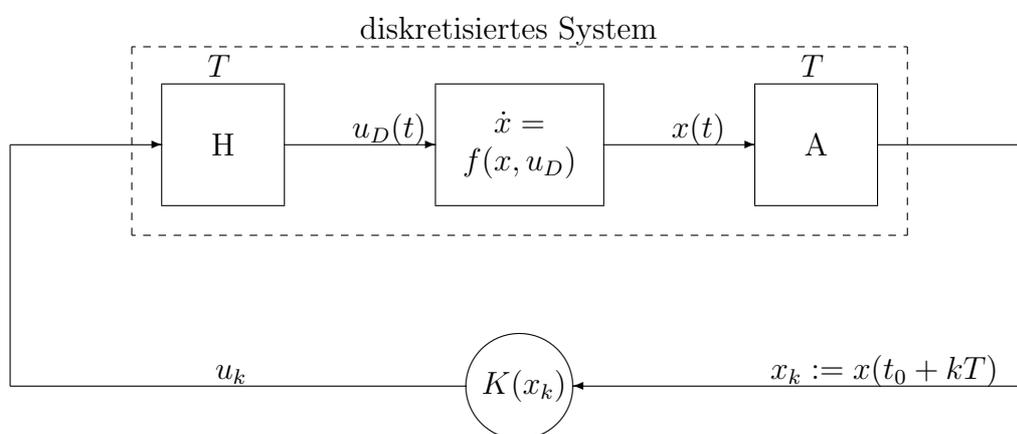


Abbildung 3.5: „Digitale“ Regelung des kontinuierlichen Systems

tisch stabil, weil  $V$  Lyapunov-Funktion für den Regelkreis ist.

$$V(f_D(x_k, K(x_k))) - V(x_k) = -l(x_k, K(x_k)) \quad (3.82)$$

Auf diese Weise kann man für jedes steuerbare diskretisierte System einen stabilisierenden (diskreten) Regler finden.

Fasst man nun Halteglied und Abtaster als Teil des Reglers auf, so erhält man einen Regler für das kontinuierliche System. Der Zustand des kontinuierlichen Systems ist zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abtastzeitpunkten nach Lemma 1 entsprechend dem Zustand zum ersten Abtastzeitpunkt und dem Eingangssignal beschränkt. Mit diesem zusätzlichen Argument impliziert also Steuerbarkeit des kontinuierlichen Systems auch dessen „Regelbarkeit“.

Mit der Frage, ob nichtlineare kontinuierliche Systeme durch Rückführung stabilisierbar sind, haben sich auch andere Autoren beschäftigt. Beispielsweise in [6] betrachten die Autoren nichtlineare Systeme, die zwar nach der in [6] gegebenen Definition asymptotisch

steuerbar sind, aber nicht durch eine stetige Rückführung stabilisiert werden können<sup>8</sup>. Die Existenz nicht stetiger stabilisierender Rückführungen  $K(x)$  wird dort gezeigt, wobei beweistechnisch auf Methoden der zeitlichen Diskretisierung zurückgegriffen wird.

## 3.4 Steuerbarkeitsmaß

### 3.4.1 Motivation zur Einführung eines Steuerbarkeitsmaßes

Der Satz zur Erhaltung der Steuerbarkeit bei Diskretisierung sagt aus, dass die Steuerbarkeit grundsätzlich für alle Abtastzeiten  $T \in (0, \bar{T}]$ ,  $\bar{T} > 0$  erhalten bleibt, wenn  $\bar{T}$  hinreichend klein ist. Der Beweis dieses Satzes konzentriert sich primär darauf, die Existenz eines solchen  $\bar{T}$  nachzuweisen. Er ist in dieser Hinsicht sogar konstruktiv: die entsprechenden Formeln gestatten die Berechnung eines geeigneten  $\bar{T}$ ; dieses dürfte in der Regel jedoch wegen der zum Teil groben Abschätzungen, die bei der Herleitung der Formeln gemacht wurden, sehr klein (und kleiner als erforderlich) sein. Es stellt sich daher die Frage nach dem größtmöglichen  $\tilde{T}$ , mit dem Steuerbarkeit für alle  $T \in (0, \tilde{T}]$  erhalten bleibt. Das Intervall  $(0, \tilde{T}]$  wäre dann der Spielraum, in dem man in der Praxis typischerweise die Abtastzeit wählen würde.

### 3.4.2 Steuerbarkeitsmaß des Systems

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $(t_0, x_0) = (0, x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Ein System ist umso schwieriger steuerbar, je größer der dazu benötigte „Aufwand“ ist<sup>10</sup>. Der Aufwand kann für einen beliebigen Anfangspunkt  $x_0 \neq 0$  beispielsweise durch<sup>11</sup>

$$\inf_{u(\cdot)} \frac{\int_0^{\infty} [\Phi^*(t, 0, x_0, u(\cdot))Q\Phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) + u^*(t)Ru(t)] dt}{x_0^*x_0} \quad (3.83)$$

ausgedrückt werden. Er ist im ungünstigsten Fall das Maximum dieses Ausdrucks über alle  $x_0$ . Der Kehrwert wird als Steuerbarkeitsmaß bezeichnet.

**Definition 4** *Maß für Steuerbarkeit des (kontinuierlichen) Systems:*

Seien  $Q$  und  $R$  symmetrisch positiv definite Matrizen geeigneter Dimension. Sei  $\mathcal{U}$  die Menge der Eingangssignale. Sei  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Der Wert

$$S_C = \left[ \sup_{x_0} \left\{ \inf_{u(\cdot)} \frac{\int_0^{\infty} [\Phi^*(t, 0, x_0, u(\cdot))Q\Phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) + u^*(t)Ru(t)] dt}{x_0^*x_0} \right\} \right]^{-1} \quad (3.84)$$

<sup>8</sup>Für ein Beispiel s.[27].

<sup>9</sup>Wegen der Zeitinvarianz des betrachteten Systems ist dies erlaubt (s. Abschnitt 2a).

<sup>10</sup>Aus der Literatur sind auch Steuerbarkeitsmaße bekannt; für eine Übersicht s. [28]

<sup>11</sup>In dieser Arbeit wird die Transponierte eines Vektors  $v$  bezeichnet mit  $v^*$ .

wird als Steuerbarkeitsmaß des kontinuierlichen Systems aus Abschnitt 2a bezeichnet.  $\square$

### Beispiel lineares System

Betrachtet wird ein lineares System

$$\dot{x} = Fx + gu \quad (3.85)$$

mit dem Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$  dem Eingang  $u \in \mathbb{R}$ , der  $(n \times n)$ -Systemmatrix  $F$  und der  $(n \times 1)$ -Eingangs- oder Steuermatrix  $g$ . Wenn das System nach Gleichung (3.85) steuerbar ist, dann gibt es dafür auch immer eine exponentiell stabilisierende Zustands-Vektor-Rückführung  $u = Kx$ , wobei  $K$  eine  $(1 \times n)$ -Matrix ist. Eine Möglichkeit zur Bestimmung von  $K$  ist die optimale Regelung. Bei dieser Art des Reglerentwurfs wird die Zustands-Vektor-Rückführung bestimmt, indem man ein Eingangssignal sucht, das eine Gütefunktion minimiert. Beispielsweise in [2] wird die Vorgehensweise beschrieben. Die Gütefunktion lautet

$$J(x_0) = \int_0^{\infty} [\Phi^*(t, 0, x_0, u(\cdot))Q\Phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) + u(t)^*Ru(t)] dt. \quad (3.86)$$

wobei  $Q$  und  $R$  beliebige, symmetrisch positiv definite quadratische Matrizen passender Dimension sind. Mithilfe dieser Matrizen kann man gewünschte Eigenschaften für den geschlossenen Regelkreis ausdrücken. Insbesondere ist der geschlossene Regelkreis stabil, wenn das kontinuierliche System vollständig steuerbar ist. Die Gütefunktion wird nach [2] minimiert durch

$$u = Kx \quad (3.87)$$

$$K = -R^{-1}g^*P_C, \quad (3.88)$$

wobei  $P_C$  die symmetrisch positiv definite Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung ist.

$$F^*P_C + P_C F - P_C g R^{-1} g^* P_C + Q = 0 \quad (3.89)$$

Der Wert des Güteintegrals ergibt sich mit der optimalen Zustands-Vektor-Rückführung dann zu

$$J(x_0) = x_0^* P_C x_0 \quad (3.90)$$

Somit hat das Steuerbarkeitsmaß für lineare kontinuierliche Systeme den Wert

$$S_C = \left[ \sup_{x_0} \left\{ \inf_{u(\cdot)} \frac{\int_0^{\infty} [\Phi^*(t, 0, x_0, u(\cdot))Q\Phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) + u(t)^*Ru(t)] dt}{x_0^* x_0} \right\} \right]^{-1} \quad (3.91)$$

$$= \left[ \sup_{x_0} \frac{x_0^* P_C x_0}{x_0^* x_0} \right]^{-1} \quad (3.92)$$

$$= [\lambda_{\max}\{P_C\}]^{-1}. \quad (3.93)$$

Die Matrix  $P_C$  ist etwas ähnliches wie die Gramsche Steuerbarkeitsmatrix aus [28]. Ein Unterschied ergibt sich, da nicht nur die Steuerfunktion zum Wert der Gütefunktion beitragen, sondern auch die gesteuerte Trajektorie.

### 3.4.3 Steuerbarkeitsmaß für das diskretisierte System

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $k_0 = 0$ , und sei  $x_{k_0} \in \mathbb{R}^{n12}$ .

Für das diskretisierte System nach Gleichung (2.21) wird ein entsprechendes Steuerbarkeitsmaß definiert. Statt des Integralen wird hier die Summe multipliziert mit der Abtastzeit verwendet. Auf diese Weise geht das Steuerbarkeitsmaß für das diskretisierte System für  $T \rightarrow 0$  in das des kontinuierlichen Systems über. Dadurch werden die beiden Maße vergleichbar.

**Definition 5** Maß für Steuerbarkeit des diskretisierten Systems:

Seien  $Q$  und  $R$  positiv definite Matrizen geeigneter Dimension, und  $T \in \mathbb{R}^+$  die Abtastzeit. Sei  $\mathcal{U}_D$  die Menge der Steuerfolgen für das diskretisierte System. Seien  $\underline{u} \in \mathcal{U}_D$  und  $x_{k_0} \in \mathbb{R}^n$ . Die Größe

$$S_D(T) = \left\{ \sup_{x_{k_0}} \left[ \inf_{\underline{u}} \frac{T \sum_{k=0}^{\infty} [\Phi_D(k, 0, x_{k_0}, \underline{u})^* Q \Phi_D(k, 0, x_{k_0}, \underline{u}) + u_k^* R u_k]}{x_{k_0}^* x_{k_0}} \right] \right\}^{-1} \quad (3.94)$$

wird als Steuerbarkeitsmaß für das diskretisierte System aus Abschnitt 2b bezeichnet.  $\square$

#### Beispiel diskretisiertes lineares System

Auch für diskretisierte lineare Systeme gibt es die Möglichkeit eine exponentiell stabilisierende Zustands-Vektor-Rückführung mithilfe der Linearen Optimalen Regelung zu entwerfen. Betrachtet wird das diskretisierte lineare System

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k \quad (3.95)$$

mit dem Zustand  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$ . Die Matrizen  $A$  und  $b$  ergeben sich (bei einem Halteglied nullter Ordnung und der Abtastzeit  $T$ ) aus den beiden Bestimmungsgleichungen

$$A = e^{FT} \quad (3.96)$$

$$b = \int_0^T e^{F(t-\tau)} g d\tau. \quad (3.97)$$

Beispielsweise liefert [2] folgende Ergebnisse für die lineare optimale Regelung von diskretisierten Systemen. Die Gütesumme

$$J_D(x_{k_0}) = \sum_{k=0}^{\infty} [\Phi_D(k, 0, x_{k_0}, \underline{u})^* Q \Phi_D(k, 0, x_{k_0}, \underline{u}) + u_k^* R u_k] T \quad (3.98)$$

wird für ein diskretisiertes steuerbares System durch die Zustands-Vektor-Rückführung  $u_k = K_D x_k$  minimiert, wenn gilt

$$K_D = -(RT + b^* P_D b)^{-1} b^* P_D A. \quad (3.99)$$

<sup>12</sup>Dies ist erlaubt, da das betrachtete diskretisierte System zeitinvariant ist (s. Abschnitt 2b).

Dabei ist  $P_D$  die Lösung der diskreten Matrix-Riccati-Gleichung

$$P_D = QT + A^*P_D A - A^*P_D b(RT + b^*P_D b)^{-1}b^*P_D A. \quad (3.100)$$

$P_D$  ist einerseits aufgrund der Definition von  $J_D$  und andererseits wegen den Gleichungen (3.96) und (3.97) abhängig von der Abtastzeit. Mit der optimalen Zustands-Vektor-Rückführung ergibt sich der Wert der Gütesumme zu

$$J_D(x_{k_0}) = x_{k_0}^* P_D x_{k_0}. \quad (3.101)$$

Damit erhält man für lineare diskretisierte Systeme das Steuerbarkeitsmaß

$$S_D(T) = \left[ \sup_{x_{k_0}} \frac{x_{k_0}^* P_D(T) x_{k_0}}{x_{k_0}^* x_{k_0}} \right]^{-1} \quad (3.102)$$

$$= [\lambda_{\max}\{P_D(T)\}]^{-1}. \quad (3.103)$$

Man sieht, auch hier ergibt sich wie im linearen kontinuierlichen Fall die Norm der Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung als Maß für Steuerbarkeit. Die Matrix  $P_D$  ist so wie im kontinuierlichen Beispiel etwas ähnliches wie die Gramsche Steuerbarkeitsmatrix aus [28]. Ein Unterschied ergibt sich, da nicht nur die Steuerfunktion zum Wert der Gütefunktion beitragen, sondern auch die gesteuerte Trajektorie, außerdem ist für das diskretisierte System die Gütefunktion nicht über ein Integral definiert, sondern über eine Summe.

### 3.4.4 Anwendungen

#### a) Simulationsbeispiel für ein lineares System

Die oben hergeleiteten Ergebnisse sollen nun anhand eines linearen Beispiels zweiter Ordnung illustriert werden. Betrachtet wird das System

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Die Eigenwerte dieses Systems liegen bei  $\lambda_{1/2} = 1 \pm j2, j := \sqrt{-1}$ . Es handelt sich also um ein instabiles System. Das System ist in Regelungsnormalform, woraus folgt, dass es vollständig steuerbar ist. Die diskrete Darstellung des Systems mit Halteglied 0. Ordnung am Eingang lautet abhängig von der Abtastzeit  $T$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} e^T(\cos(2T) - \frac{1}{2}\sin(2T)) & \frac{1}{2}e^T \sin(2T) \\ -\frac{5}{2}e^T \sin(2T) & e^T(\cos(2T) + \frac{1}{2}\sin(2T)) \end{bmatrix} x_k + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} \frac{1}{10}(e^T(-2\cos(2T) + \sin(2T)) + 2) \\ \frac{1}{2}e^T \sin(2T) \end{bmatrix} u_k.$$

In [2] wurde gezeigt: Steuerbarkeit bei Diskretisierung eines steuerbaren kontinuierlichen Systems bleibt erhalten, wenn zwei verschiedene Eigenwerte des kontinuierlichen Systems auf zwei verschiedene Eigenwerte des diskretisierten Systems abgebildet werden. In diesem

Beispiel bedeutet das, dass Steuerbarkeit verloren geht, wenn für die Abtastzeit gilt  $T = i\frac{\pi}{2}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . In diesem Fall ergibt sich die Systemmatrix des diskretisierten Systems zu

$$A(i\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} \cos(i\pi) & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \cos(i\pi) \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Man sieht sofort, dass mit dieser Systemmatrix die Steuerbarkeitsmatrix des diskretisierten Systems ( $Q_{Ab} = [b, Ab]$ ) singulär wird. Aus der linearen Systemtheorie ist also bekannt, dass bei der zeitdiskreten Regelung des Beispielsystems Steuerbarkeit verloren geht, wenn die Abtastzeit  $T$  ein Vielfaches von  $\pi/2$  beträgt. Dies sollte sich auch im Steuerbarkeitsmaß widerspiegeln.

Das Steuerbarkeitsmaß wurde für das kontinuierliche System mit Gleichung (3.93) und Gleichung (3.89) berechnet. Für verschiedene Abtastzeiten  $T \in (0, 5]$  wurden zunächst die Matrizen  $A$  und  $b$  und anschließend das Steuerbarkeitsmaß mit der jeweiligen Abtastzeit nach Gleichung (3.103) und Gleichung (3.100) berechnet. Als Gewichtungsmatrizen  $Q, R$  wurden die Einheitsmatrizen verwendet. In Abbildung 3.6 ist das Steuerbarkeits-

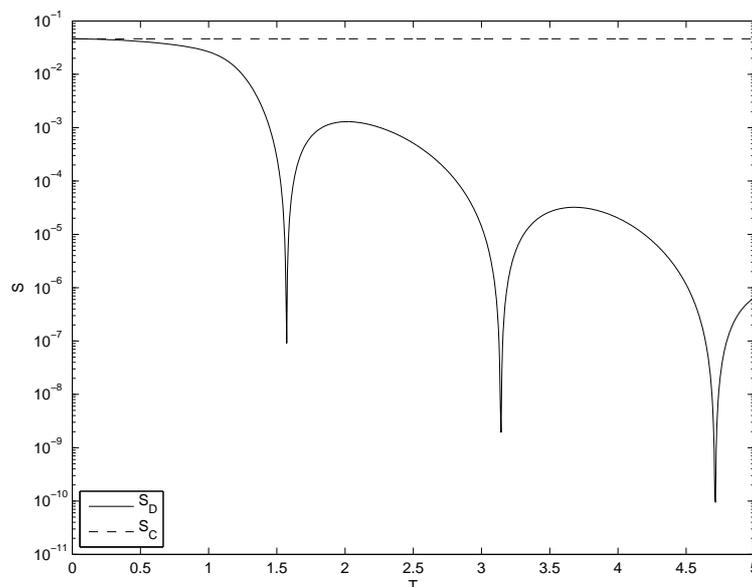


Abbildung 3.6: Steuerbarkeitsmaß für lineare diskretisierte Systeme aufgetragen über die Abtastzeit

maß für diskretisierte Systeme über die Abtastzeit  $T$  aufgetragen. Bei  $T = i\frac{\pi}{2}$  zeigt die logarithmische Darstellung Peaks nach unten. Das diskretisierte System ist dort praktisch nicht steuerbar und das Steuerbarkeitsmaß geht gegen Null. Zum Vergleich wurde auch das Steuerbarkeitsmaß für das kontinuierliche System eingetragen. Wenn die Abtastzeit gegen Null geht, stimmt das Steuerbarkeitsmaß des kontinuierlichen Systems mit dem Steuerbarkeitsmaß des diskretisierten Systems überein. Je größer die Abtastzeit wird, desto kleiner wird das Steuerbarkeitsmaß des diskretisierten Systems und desto schlechter

wird das System steuerbar sein.

### b) Allgemeiner Fall

Will man das Steuerbarkeitsmaß nach Definition 4 bzw. Definition 5 für nichtlineare Systeme berechnen, hat man keine geschlossene Lösung des betreffenden Systems mehr. Aber man könnte in der Praxis im Prinzip auf numerischem Wege wie folgt vorgehen.

- Wahl einer angemessen großen Konstante  $E$ .
- Auswahl einer repräsentativen Menge  $\mathcal{U}_{part}$  mit endlich vielen Elementen aus der Menge der möglichen Eingangssignale.
- Auswahl einer repräsentativen Menge  $\mathcal{X}$  mit endlich vielen Elementen aus  $\mathbb{R}^n$ .
- (numerische) Berechnung der Größe

$$\bar{S}_C = \max_{x_0 \in \mathcal{X}} \left\{ \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{part}} \frac{\int_0^E \Phi^*(t, 0, x_0, u(\cdot)) Q \Phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) + u(t)^* R u(t) dt}{x_0^* x_0} \right\}$$

- Wahl der Abtastzeit  $T$
- Bestimmung der kleinsten natürlichen Zahl  $m$ , so dass gilt  $mT \geq E$
- Auswahl einer repräsentativen Menge  $\mathcal{U}_{D,part}$  von Eingangsfolgen  $\underline{u} := \{u_k\}_{k=0}^m$
- numerische Berechnung von

$$\bar{S}_D = \max_{x_0 \in \mathcal{X}} \left\{ \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{D,part}} \frac{\sum_{k=0}^m \Phi_D^*(kT, 0, x_0, u(\cdot)) Q \Phi_D(kT, 0, x_0, u(\cdot)) + u(kT)^* R u(kT) T}{x_0^* x_0} \right\}$$

Die Größen  $\bar{S}_C$  und  $\bar{S}_D$  gewinnen an Aussagekraft, je mehr Elemente in den Mengen  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}_{part}$  und  $\mathcal{U}_{D,part}$  berücksichtigt werden. Allerdings wächst der Rechenaufwand im Allgemeinen exponentiell mit der Anzahl der betrachteten Möglichkeiten (die sich aus der Anzahl der ausgewählten Anfangszustände und Steuersignale und der Länge des betrachteten Intervalls ergibt). Deswegen ist eine solche Vorgehensweise nur theoretisch.

# Kapitel 4

## Beobachtbarkeit

### 4.1 Definition der Beobachtbarkeit

Unter Beobachtbarkeit eines nichtlinearen Systems versteht man ganz allgemein die Möglichkeit, den Zustand des Systems aus Ein- und Ausgangsmessung(en) zu ermitteln. Die Kenntnis des Zustands wird benötigt, wenn man eine konkrete regelungstechnische Aufgabe, wie z. B. die Regelung an der Ruhelage, mit einer Zustands-Vektor-Rückführung lösen möchte. Die Definition von Beobachtbarkeit wird hier aus [24] übernommen<sup>1</sup>. Dort wird auch gezeigt, dass für ein System das nach dieser Definition beobachtbar ist immer ein Beobachter existiert.

**Definition 6** *Beobachtbarkeit des kontinuierlichen Systems:*

Sei  $\mathcal{U}$  die Menge der stückweise stetigen Signale im Intervall  $(-\infty, \infty)$ . Sei  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ . Das kontinuierliche System aus Abschnitt 2a mit Gleichung (2.1) heißt beobachtbar, wenn es Konstanten  $\varsigma, \sigma > 0$  gibt, so dass für jedes  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ , jedes  $t \in \mathbb{R}$  und jedes  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]} \geq \varsigma |x - x'|. \quad (4.1)$$

□

Die folgende Definition von Beobachtbarkeit für das diskretisierte System wurde aus [29] übernommen. Dort wurde auch ein Beobachter für diskrete Systeme, die nach dieser Definition beobachtbar sind konstruiert.

**Definition 7** *Beobachtbarkeit des diskretisierten Systems:*

Das diskretisierte System nach Abschnitt 2b mit Gleichung (2.21) heißt beobachtbar, wenn

---

<sup>1</sup>Während es bei Steuerbarkeit zweckmäßig war, die Betrachtungen ab dem Zeitpunkt  $t_0$  „vorwärts“ durchzuführen, ist es hier zweckmäßig, die Betrachtungen vom Zeitpunkt  $t$  aus „zurückblickend“ durchzuführen. Das deckt sich auch mit der Vorstellung, die man von Steuerung bzw. Beobachtung hat; bei der Steuerung möchte man die Trajektorie durch das Stellsignal beeinflussen, was ist in der Regel „rückwirkend“ nicht möglich. Bei der Beobachtung möchte man aus vorliegenden Messungen den Zustand ermitteln. Vorliegen können aber nur aktuelle Messungen und Messungen aus der Vergangenheit.

es Konstanten  $\varsigma_D > 0$  und  $\nu \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für jedes  $\underline{u} := \{u_{k+\kappa}\}_{\kappa=-\infty}^{\infty}$ ,  $u_{k+\kappa} \in \mathbb{R}$ , jedes  $k \in \mathbb{Z}$  und jedes  $x_k, x'_k \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|\Psi_D(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}) - \Psi_D(k + \kappa, k, x'_k, \underline{u})\|_{\kappa \in [-\nu, 0]} \geq \varsigma_D |x_k - x'_k|. \quad (4.2)$$

□

Diskretisierung bedeutet aus der Sicht des kontinuierlichen Systems ausgangsseitig Abtastung. Statt des gesamten Ausgangssignals stehen nach der Diskretisierung nur noch die Werte des Ausgangssignals zu den Abtastzeitpunkten zur Verfügung, also die Ausgangsfolge. Für die Beobachtung fehlt die Information, die das Ausgangssignal zwischen den Abtastzeitpunkten beinhaltet. Es stellt sich daher die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen aus der Beobachtbarkeit des kontinuierlichen Systems die Beobachtbarkeit des diskretisierten Systems folgt (Erhalt der Beobachtbarkeit bei Diskretisierung). In diesem Abschnitt wird die Annahme, dass der Ausgang linear ist ausgenutzt. Dadurch wird der nachfolgende Beweis wesentlich übersichtlicher.

## 4.2 Erhaltung der Beobachtbarkeit

Der folgende Satz und sein Beweis sind das zweite zentrale Ergebnis dieser Arbeit.

**Satz 2** *Wenn das kontinuierliche System aus Abschnitt 2a beobachtbar ist, dann gibt es stets ein  $\bar{T} > 0$ , so dass auch das mit der Abtastzeit  $T \in (0, \bar{T}]$  diskretisierte System aus 2b beobachtbar ist.* □

Bevor der Satz im Detail bewiesen wird, wird hier zunächst der Grundgedanke des Beweises skizziert.

Man betrachtet ein beliebiges  $t \in \mathbb{R}$ , zwei beliebige  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  und ein beliebiges  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ . Die zugehörigen Ausgangstrajektorien lauten

$$\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) \quad \text{bzw.} \quad \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot)) \quad , \tau \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Im Zeitraum  $[t - \sigma, t]$  ( $\sigma$  gemäß Definition 6) wird deren Differenz

$$\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot)) \quad , \tau \in [-\sigma, 0] \quad (4.4)$$

betrachtet.

Da das kontinuierliche System nach Voraussetzung beobachtbar ist (d. h. Ungleichung (4.1) ist erfüllt), gibt es mindestens einen Zeitpunkt  $\tau_M \in [-\sigma, 0]$ , für den gilt (mit  $\varsigma$  gemäß Definition 6)

$$|\Psi(t + \tau_M, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau_M, t, x', u(\cdot))| \geq \frac{\varsigma}{\sqrt{\sigma}} |x - x'|. \quad (4.5)$$

Der Ausgang des Systems ist eine lineare Funktion des Zustands. Die in Ungleichung (4.5) auftretende Differenz  $\Psi(t + \tau_M, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau_M, t, x', u(\cdot))$  wird daher von einem entsprechenden Unterschied der zugehörigen Werte der Zustandstrajektorien (zum Zeitpunkt  $t + \tau_M$ ) erzeugt. Aufgrund der Lipschitzbedingung kann sich dieser Unterschied nicht beliebig schnell, sondern nur exponentiell (beschränkt) ändern. Daher existiert eine Konstante  $\bar{T} > 0$ , so dass

$$|\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))| \geq \frac{\varsigma}{2\sqrt{\sigma}} |x - x'| \quad , \tau \in [\tau_M - \bar{T}, \tau_M + \bar{T}] \quad (4.6)$$

gilt.

Nun wird die mit der Abtastzeit  $T > 0$  abgetastete Ausgangstrajektorie betrachtet. Sie wird -ausgehend vom Startzeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  des kontinuierlichen Systems- beschrieben durch

$$\Psi(t_0 + iT, t, x, u(\cdot)) \quad , i \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Für Abtastzeiten  $T \in (0, \bar{T}]$  liegt mindestens ein Abtastzeitpunkt  $t_0 + jT$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  im Intervall  $[t + \tau_M - \bar{T}, t + \tau_M + \bar{T}] \cap [t - \sigma, t]$ . Für diesen Abtastzeitpunkt gilt

$$|\Psi(t_0 + jT, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t_0 + jT, t, x', u(\cdot))| \geq \frac{\varsigma}{2\sqrt{\sigma}} |x - x'|. \quad (4.8)$$

Die obige Betrachtung führt für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  und alle  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  auf dasselbe Ergebnis (d. h. man erhält Ungleichung (4.8), wobei ggf. unterschiedliche  $\tau_M$  und  $j$  verwendet werden). Insbesondere erhält man Ungleichung (4.8) für  $t = t_0 + kT$ ,  $x = x_k$ ,  $x' = x'_k$  und  $u(\cdot) = u_D(\cdot)$ , wobei  $k \in \mathbb{Z}$  und  $u_D(\cdot)$  das bei Diskretisierung verwendete stückweise konstante Eingangssignal ist (s. Abschnitt 2). Deswegen lässt sich aus Ungleichung (4.2) und Ungleichung (4.8) die Beobachtbarkeit des mit  $T \in (0, \bar{T}]$  diskretisierten Systems folgern.

## Beweis von Satz 2

Sei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  und  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ . Das betrachtete kontinuierliche System aus Abschnitt 2a (Gleichung (2.1)) ist nach Voraussetzung beobachtbar, daher gilt mit den Konstanten  $\varsigma, \sigma > 0$  gemäß Definition 6

$$\varsigma |x - x'| \leq \|\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]} \quad (4.9)$$

$$= \left[ \int_{-\sigma}^0 [\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))]^2 d\tau \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

$$\leq \left[ \sigma \max_{\tau \in [-\sigma, 0]} [\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))]^2 \right]^{1/2} \quad (4.11)$$

$$= \sqrt{\sigma} \max_{\tau \in [-\sigma, 0]} |\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))|. \quad (4.12)$$

Folglich gibt es mindestens einen Zeitpunkt  $\tau_M \in [-\sigma, 0]$  (der von  $t, x, x'$  und  $u(\cdot)$  abhängt), so dass

$$|\Psi(t + \tau_M, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau_M, t, x', u(\cdot))| \geq \frac{\varsigma}{\sqrt{\sigma}} |x - x'|. \quad (4.13)$$

Des weiteren gilt für  $\tau \in [-\sigma, 0]$  und mit der Bezeichnung

$$\Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) := [\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))] \quad (4.14)$$

$$\Delta\Phi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) := [\Phi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Phi(t + \tau, t, x', u(\cdot))]. \quad (4.15)$$

dass

$$\begin{aligned} & |\Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))| \\ &= |\Delta\Psi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot)) + \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) - \Delta\Psi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot))| \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\geq |\Delta\Psi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot))| - |\Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) - \Delta\Psi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot))| \quad (4.17)$$

$$\geq \frac{\varsigma}{\sqrt{\sigma}} |x - x'| - |\Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) - \Delta\Psi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot))|. \quad (4.18)$$

Der zweite Summand lässt sich umformen in

$$\begin{aligned} & \left| \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) - \Delta\Psi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot)) \right| \\ &= \left| \int_{\tau_M}^{\tau} \frac{d}{ds} \Delta\Psi(t + s, t, x, x', u(\cdot)) ds \right| \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$= \left| \int_{\tau_M}^{\tau} \frac{d}{ds} h \Delta\Phi(t + s, t, x, x', u(\cdot)) ds \right| \quad (4.20)$$

$$= \left| \int_{\tau_M}^{\tau} h \frac{d}{ds} [\Phi(t + s, t, x, u(\cdot)) - \Phi(t + s, t, x', u(\cdot))] ds \right| \quad (4.21)$$

$$= \left| \int_{\tau_M}^{\tau} h \left[ f(\Phi(t + s, t, x, u(\cdot)), u(t + s)) - f(\Phi(t + s, t, x', u(\cdot)), u(t + s)) \right] ds \right|. \quad (4.22)$$

Für  $\tau \geq \tau_M$  folgt dann mit der Lipschitzbedingung für  $f$ , mit der Bezeichnung (4.15) und mit Lemma 1

$$\begin{aligned} & \left| \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) - \Delta\Psi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot)) \right| \\ &\leq |h|L \int_{\tau_M}^{\tau} |\Delta\Phi(t + s, t, x, x', u(\cdot))| ds \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\leq |h|L \int_{\tau_M}^{\tau} e^{L|s - \tau_M|} |\Delta\Phi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot))| ds \quad (4.24)$$

$$= |h|(e^{L|\tau - \tau_M|} - 1) |\Delta\Phi(t + \tau_M, t, x, x', u(\cdot))|. \quad (4.25)$$

$|\Delta\Phi(t+\tau_M, t, x, x', u(\cdot))|$  lässt sich mit Lemma 1 auf  $|\Delta\Phi(t, t, x, x', u(\cdot))|$  zurückführen, und man erhält unter der Berücksichtigung von  $\tau_M \leq \sigma$  schließlich

$$|\Delta\Psi(t+\tau, t, x, x', u(\cdot)) - \Delta\Psi(t+\tau_M, t, x, x', u(\cdot))| \leq |h|e^{L\sigma}(e^{L|\tau-\tau_M|} - 1)|x - x'|. \quad (4.26)$$

Für  $\tau < \tau_M$  ergibt sich wegen  $|\Delta\Psi(t+\tau, \dots) - \Delta\Psi(t+\tau_M, \dots)| = |\Delta\Psi(t+\tau_M, \dots) - \Delta\Psi(t+\tau, \dots)|$  und des Betrages im Exponenten das gleiche Ergebnis.

Aus (4.18) und (4.26) ergibt sich

$$|\Delta\Psi(t+\tau, t, x, x', u(\cdot))| \geq \left[ \frac{\varsigma}{\sqrt{\sigma}} - |h|e^{L\sigma}(e^{L|\tau-\tau_M|} - 1) \right] |x - x'|, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (4.27)$$

Die Funktion

$$\gamma(|\tau - \tau_M|) := \frac{\varsigma}{\sqrt{\sigma}} - |h|e^{L\sigma}(e^{L|\tau-\tau_M|} - 1) \quad (4.28)$$

ist stetig, und es gilt  $\gamma(0) = \frac{\varsigma}{\sqrt{\sigma}}$ . Daher existiert eine positive Zahl  $\bar{T}$ , so dass

$$\gamma(|\tau - \tau_M|) \geq \frac{\varsigma}{2\sqrt{\sigma}}, \quad |\tau - \tau_M| \leq \bar{T}. \quad (4.29)$$

Damit folgt aus (4.27)

$$\left| \Psi(t+\tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t+\tau, t, x', u(\cdot)) \right| \geq \frac{\varsigma}{2\sqrt{\sigma}} |x - x'|, \quad \tau \in [\tau_M - \bar{T}, \tau_M + \bar{T}]. \quad (4.30)$$

Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  der Anfangszeitpunkt des kontinuierlichen Systems. Die mit der Abtastzeit  $T > 0$  abgetastete Ausgangstrajektorie lautet

$$\Psi(t_0 + iT, t, x, u(\cdot)), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (4.31)$$

Für  $T \in (0, \bar{T}]$  liegt mindestens ein Abtastzeitpunkt  $t_0 + jT$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , im Intervall  $[t + \tau_M - \bar{T}, t + \tau_M + \bar{T}] \cap [t - \sigma, t]$ . Daher gilt

$$|\Psi(t_0 + jT, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t_0 + jT, t, x', u(\cdot))| \geq \frac{\varsigma}{2\sqrt{\sigma}} |x - x'|. \quad (4.32)$$

Diese Betrachtungen gelten für jede beliebige Wahl von  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  und  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ , also gilt Gleichung (4.32) (ggf. mit anderem  $j$ ) auch insbesondere für  $t = t_0 + kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_k = \Phi(t_0 + kT, t_0 + kT, x_k, u_D(\cdot))$ ,  $x'_k = \Phi(t_0 + kT, t_0 + kT, x'_k, u_D(\cdot))$ , wobei  $u_D(\cdot)$  das bei der Diskretisierung vom Halteglied (mit der Abtastzeit  $T$ ) erzeugte stückweise konstante Eingangssignal ist. Man erhält also, wie oben, für mindestens einen Abtastzeitpunkt  $t_0 + jT$ , der im Intervall  $[t_0 + kT + \tau_M - \bar{T}, t_0 + kT + \tau_M + \bar{T}] \cap [t_0 + kT - \sigma, t_0 + kT]$  liegt

$$|\Psi(t_0 + jT, t_0 + kT, x_k, u_D(\cdot)) - \Psi(t_0 + jT, t_0 + kT, x'_k, u_D(\cdot))| \quad (4.33)$$

$$= |\Psi_D(j, k, x_k, \mathbf{u}) - \Psi_D(j, k, x'_k, \mathbf{u})| \quad (4.34)$$

$$\geq \frac{\varsigma}{2\sqrt{\sigma}} |x_k - x'_k|. \quad (4.35)$$

Wählt man nun noch  $\nu$  als die kleinste Natürliche Zahl, so dass gilt  $\nu T \geq \sigma$ , dann ist der Summand  $|\Psi_D(j, k, x_k, \underline{u}) - \Psi_D(j, k, x'_k, \underline{u})|$  in der Summe

$$\sum_{i=-\nu}^0 |\Psi_D(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}) - \Psi_D(k + \kappa, k, x'_k, \underline{u})| \quad (4.36)$$

enthalten, weil das im Diskreten erfasste Zeitintervall das Intervall  $[t_0 + kT - \sigma, t_0 + kT]$  vollständig enthält. Somit gilt Gleichung (4.2), und das mit der Abtastzeit  $T \in (0, \bar{T}]$  diskretisierte System ist beobachtbar.  $\square$

### 4.3 Beobachtbarkeit impliziert „Existenz eines Beobachters“

Wenn ein System beobachtbar ist, bedeutet das, dass man aus Ein- und Ausgangsmessungen den Zustand des Systems ermitteln kann. Ein System, das als Eingangsgrößen  $u_k$  und  $y_k$  hat und als Ausgangsgröße den Schätzwert des Zustands  $\hat{x}_k$ , nennt man Beobachter.

Aus der Beobachtbarkeit des diskretisierten Systems (Ungleichung (4.2)) kann man direkt die Grundidee eines Beobachters ableiten (vgl. [29]):

Sei

$$\underline{u}_k := \{u_{k+\kappa}\}_{\kappa=-\nu}^0 \quad (4.37)$$

eine Teilfolge einer beliebigen Eingangsfolge  $\underline{u}$  und

$$\underline{y}_k := \{\Psi(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}_k)\}_{\kappa=-\nu}^0 \quad (4.38)$$

eine Teilfolge einer möglichen Ausgangstrajektorie. Beobachtbarkeit nach Ungleichung (4.2) besagt, dass es zu jedem Paar von Teilfolgen  $\underline{u}_k, \underline{y}_k$  genau ein  $x_k$  gibt. Das bedeutet,  $x_k$  lässt sich aus  $\underline{u}_k, \underline{y}_k$  eindeutig bestimmen. Außerdem gilt  $x_{k+1} = f_D(x_k, u_k)$ . Deswegen gibt es eine Abbildung<sup>2</sup>  $Q := \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $x_{k+1} = Q(\underline{u}_k, \underline{y}_k)$ . Ersetzt man nun  $k$  durch  $k - 1$ , so erhält man  $x_k = Q(\underline{u}_{k-1}, \underline{y}_{k-1})$ ; der Zustand  $x_k$  des Systems zum diskreten Zeitpunkt  $k$  lässt sich also aus den  $\nu + 1$  zurückliegenden Messungen des Eingangs und des Ausgangs ermitteln.

Diese Grundidee für einen Beobachter wird in [29] ausführlich behandelt. Dort wird auch gezeigt, dass  $Q$  unter den hier gemachten Voraussetzungen für das diskretisierte System (s. Abschnitt 2) lipschitzstetig ist und lipschitzstetig auf den gesamten Raum  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  erweitert werden kann. Letzteres wird benötigt, wenn  $\nu > n$  ist.

---

<sup>2</sup>Mit  $\mathcal{H}$  wird in [29] die Menge der möglichen Teilfolgen  $\underline{u}_k, \underline{y}_k$  bezeichnet.

Wie eingangs gesagt, verarbeitet ein Beobachter die gemessenen Werte  $u_k$  und  $y_k$  zu dem Schätzwert  $\hat{x}_k$ . In der oben beschriebenen Beobachtungsabbildung werden die Teilfolgen  $\underline{u}_{k-1}, \underline{y}_{k-1}$  benötigt. Daher muss ein Beobachter, der auf die oben beschriebene Idee aufbaut, die benötigten Teilfolgen intern in irgendeiner Form bereitstellen. Das geht beispielsweise, indem man zwei Filter  $(\nu + 1)$ -ter Ordnung, wie folgt, verwendet

$$\hat{u}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{F_1} \hat{u}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_1} u_k \quad (4.39)$$

$$\hat{y}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{F_2} \hat{y}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_2} y_k \quad (4.40)$$

Man sieht, dass  $\hat{u}_k \rightarrow \underline{u}_{k-1}$  und  $\hat{y}_k \rightarrow \underline{y}_{k-1}$  in  $\nu+1$  Schritten nach Einschalten des Beobachters konvergiert ist. Folglich konvergiert auch der vom Beobachter ermittelte Schätzwert  $\hat{x}_k = Q(\hat{u}_k, \hat{y}_k) \rightarrow x_k$  nach  $\nu + 1$  Schritten. Das diskretisierte System mit Beobachter ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

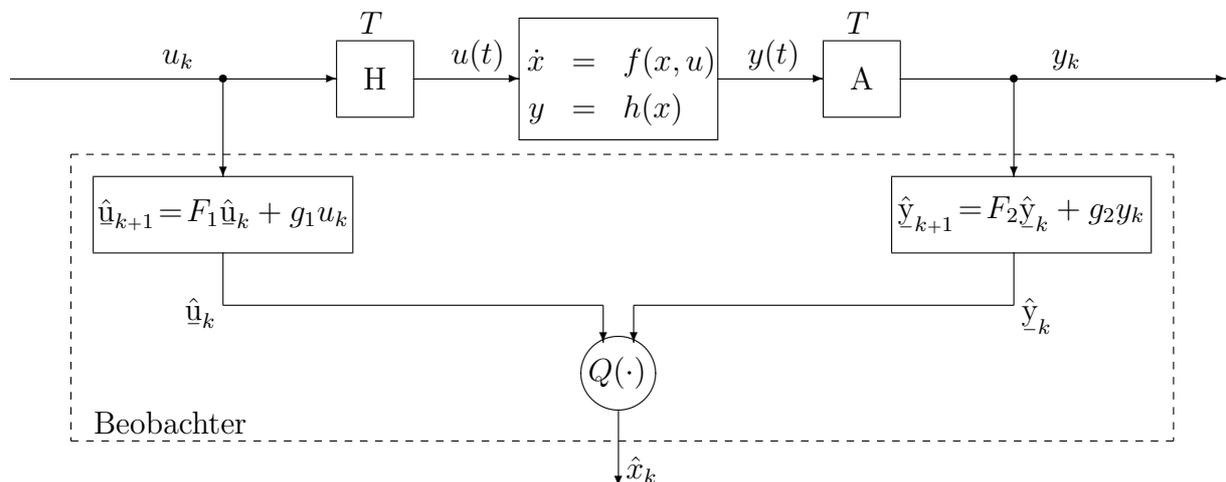


Abbildung 4.1: Diskretisiertes System mit Beobachter

Ist das diskretisierte System beobachtbar, existiert ein Beobachter. Ist es zusätzlich noch steuerbar, existiert eine exponentiell stabilisierende Regelung der Form  $u_k = K(x_k)$  nach

Abschnitt 3.3. Diese Regelung kann - wenn der Zustand selbst nicht gemessen wird, sondern nur der Ausgang des Systems - mithilfe des Beobachters als Ausgangsrückführung

$$\hat{\underline{u}}_{k+1} = F_1 \hat{\underline{u}}_k + g_1 u_k \quad (4.41)$$

$$\hat{\underline{y}}_{k+1} = F_2 \hat{\underline{y}}_k + g_2 y_k \quad (4.42)$$

$$u_k = K(Q(\hat{\underline{u}}_k, \hat{\underline{y}}_k)) \quad (4.43)$$

implementiert werden. Ein solcher Regler entspricht dem von Gleichung (1.15). Die exponentielle Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit obigem Regler kann man sich folgendermaßen plausibel machen: Da der vom Beobachter gelieferte Schätzwert des Zustands nach  $\nu + 1$  Schritten gegen den tatsächlichen Zustand des Systems konvergiert, verhält sich ab diesem Zeitpunkt die Ausgangsrückführung wie die exponentiell stabilisierende Zustands-Vektor-Rückführung nach Abschnitt 3.3. Wenn der Zustand des Systems in den ersten  $\nu + 1$  Schritten nach dem Einschalten der Regelung nicht über alle Grenzen wächst, kann man eine exponentielle Schranke für den Zustand des geregelten Systems herleiten. Für einen ausführlichen Stabilitätsbeweis s. [29].

## 4.4 Beobachtbarkeitsmaß

### 4.4.1 Motivation zur Einführung eines Beobachtbarkeitsmaßes

Der Satz zur Erhaltung der Beobachtbarkeit (Satz 2) sagt aus, dass Beobachtbarkeit bei Diskretisierung grundsätzlich für alle Abtastzeiten  $T \in (0, \bar{T}]$  erhalten bleibt. Der Beweis des Satzes konzentriert sich primär darauf, die Existenz eines solchen  $\bar{T} > 0$  nachzuweisen. Er ist in dieser Hinsicht sogar konstruktiv; die entsprechenden Formeln gestatten die Berechnung eines geeigneten  $\bar{T}$ . Dieses dürfte aber in der Regel wegen der zum Teil groben Abschätzungen, die in der Herleitung gemacht wurden, sehr klein (und kleiner als erforderlich) sein. Es stellt sich daher die Frage nach dem größtmöglichen  $\bar{T}$ , mit dem Beobachtbarkeit für alle mit  $T \in (0, \bar{T}]$  diskretisierten Systeme erhalten bleibt. Das Intervall  $(0, \bar{T}]$  wäre dann der Spielraum, in dem man in der Praxis die Abtastzeit wählen könnte.

### 4.4.2 Beobachtbarkeitsmaß des Systems

Ein System ist umso schwieriger beobachtbar, je weniger sich ein Unterschied in den Zuständen durch einen entsprechenden Unterschied in den zugehörigen Ausgängen bemerkbar macht. Das heißt, je kleiner die (größtmögliche) Konstante  $\varsigma$  ist, für die Definition 6 (Ungleichung (4.1)) gilt, desto schlechter ist ein System beobachtbar. Die Division von Ungleichung (4.1) durch  $|x - x'|$  ergibt

$$\varsigma \leq \frac{\|\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]}}{|x - x'|} \quad (4.44)$$

Die größtmögliche Konstante ist das Minimum (über  $x, x', u(\cdot)$ ) des Ausdrucks auf der rechten Seite. Es kann als Beobachtbarkeitsmaß genommen werden.

Für die späteren Beispiele ist es vorteilhaft, Beobachtbarkeit über ein unendliches Intervall und mit (dadurch gegebenenfalls erforderlicher) exponentieller Gewichtung analog zu Definition 6 zu definieren. Lemma 5, Seite 58 besagt, dass die beiden Definitionen für entsprechend großes  $\sigma$  äquivalent sind. Damit wird nun hier das Beobachtbarkeitsmaß, wie folgt, definiert (vgl. Lemma 3, Seite 57).

**Definition 8** Sei  $\mathcal{U}$  die Menge der stückweise stetigen Signale,  $\alpha > L$  eine beliebige Konstante,  $t \in \mathbb{R}$  ein beliebiger Zeitpunkt,  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  beliebige Punkte mit  $x \neq x'$  und  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ . Der Wert<sup>3</sup>

$$B_C = \min_{x, x', u(\cdot)} \frac{\|e^{\alpha\tau}\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - e^{\alpha\tau}\Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))\|_{\tau \in (-\infty, 0]}}{|x - x'|} \quad (4.45)$$

heißt Beobachtbarkeitsmaß<sup>4</sup> des kontinuierlichen Systems aus Abschnitt 2a mit Gleichung (2.1).  $\square$

Je größer  $B_C$  ist, desto mehr unterscheiden sich zwei Ausgangstrajektorien, die zu verschiedenen Punkten gehören und desto besser wird das System beobachtbar sein. Ein Beobachtbarkeitsmaß von Null bedeutet, dass es für das System mindestens eine „Konstellation“ von  $x, x', u(\cdot)$  gibt, so dass die Ausgangstrajektorie  $\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot))$  identisch mit der Ausgangstrajektorie  $\Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))$  ist. In diesem Fall besteht keine Möglichkeit, anhand der Kenntnis des Eingangssignals und der Ausgangstrajektorien eindeutig auf den Zustand zu schließen. Mit anderen Worten: Das System ist nicht beobachtbar.

### Beispiel lineares System

Betrachtet wird das lineare kontinuierliche System

$$\dot{x} = Fx + gu \quad (4.46)$$

$$y = hx \quad (4.47)$$

mit dem Zustand  $x \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $u \in \mathbb{R}$ , dem Ausgang  $y \in \mathbb{R}$ , sowie der  $(n, n)$ -Systemmatrix  $F$ , der  $(n, 1)$ -Eingangsmatrix  $g$  und der  $(1, n)$ -Ausgangsmatrix  $h$ .

Sei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ . Die Ausgangstrajektorien ergeben sich zu

$$\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) = h \left( e^{F\tau} x + \int_0^\tau e^{F(\tau-s)} gu(t+s) ds \right), \tau \in \mathbb{R} \quad (4.48)$$

$$\Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot)) = h \left( e^{F\tau} x' + \int_0^\tau e^{F(\tau-s)} gu(t+s) ds \right). \quad (4.49)$$

<sup>3</sup>In Fällen, in denen das Minimum nicht existiert, ist in den Definitionen das Minimum durch das Infimum zu ersetzen.

<sup>4</sup>Für eine Übersicht der in der Literatur bekannten Beobachtbarkeitsmaße s. [28]

Entsprechend gilt für die Differenz zweier Ausgangstrajektorien

$$\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot)) = h e^{F\tau}(x - x'). \quad (4.50)$$

Wählt man nun  $\alpha > -\lambda_{\min}\{F\}$ , ist sichergestellt, dass die  $\mathcal{L}_2$ -Norm in (Gleichung (4.45)) existiert. Das Beobachtbarkeitsmaß für das lineare kontinuierliche System lautet dann

$$B_C = \min_{x, x', u(\cdot)} \frac{\|h e^{(F+\alpha I)\tau}(x - x')\|_{\tau \in (-\infty, 0]}}{|x - x'|} \quad (4.51)$$

$$= \min_{x, x'} \frac{\left[ \int_{-\infty}^0 (x - x')^* e^{(F+\alpha I)^*\tau} h^* h e^{(F+\alpha I)\tau} (x - x') d\tau \right]^{\frac{1}{2}}}{|x - x'|}. \quad (4.52)$$

Mit der Bezeichnung<sup>5</sup>

$$P_C := \int_{-\infty}^0 e^{(F+\alpha I)^*\tau} h^* h e^{(F+\alpha I)\tau} d\tau \quad (4.53)$$

ergibt sich aus Gleichung (4.52)

$$B_C = \min_{x, x'} \frac{[(x - x')^* P_C (x - x')]^{\frac{1}{2}}}{|x - x'|} \quad (4.54)$$

$$= \min_{x, x'} \frac{[\lambda_{\min}\{P_C\}]^{\frac{1}{2}} |x - x'|}{|x - x'|} \quad (4.55)$$

$$= [\lambda_{\min}\{P_C\}]^{\frac{1}{2}} \quad (4.56)$$

Bei linearen kontinuierlichen Systemen lässt sich also das Beobachtbarkeitsmaß aus den Eigenwerten der Matrix  $P_C$  ermitteln.

#### 4.4.3 Beobachtbarkeitsmaß für das diskretisierte System

Für das diskretisierte System kann entsprechend die größtmögliche Konstante, für die Definition 7 (Ungleichung (4.2)) gilt, als Beobachtbarkeitsmaß genommen werden. Sie ist das Minimum (über  $x_k, x'_k, \underline{u}$ ) des Ausdrucks auf der rechten Seite von

$$s_D \leq \frac{\|\Psi_D(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}) - \Psi_D(k + \kappa, k, x'_k, \underline{u})\|_{\kappa \in [-\nu, 0]}}{|x_k - x'_k|}. \quad (4.57)$$

Auch hier ist es für die späteren Beispiele vorteilhaft, Beobachtbarkeit über ein unendliches Intervall und mit (gegebenenfalls erforderlicher) Gewichtung zu definieren. Analog

---

<sup>5</sup>Bei  $P_C$  handelt es sich um die Gramsche Matrix, die häufig in der Literatur als ein Beobachtbarkeitsmaß für lineare Systeme herangezogen wird (s. z.B [30] und die dort zitierten Arbeiten).

zu Lemma 5 kann man auch für das diskretisierte System folgern, dass die beiden Definitionen für entsprechend großes  $\nu$  äquivalent sind. Zusätzlich wird in der Gewichtung noch die Abtastzeit berücksichtigt, damit das Beobachtbarkeitsmaß des kontinuierlichen Systems und das des diskretisierten vergleichbar werden. Es wird nun also das Beobachtbarkeitsmaß des diskretisierten Systems wie folgt definiert (vgl. Lemma 4, Seite 57).

**Definition 9** Sei  $\mu > \frac{1}{L_D}$  eine beliebige Konstante, sei  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_k, x'_k \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_k \neq x'_k$  und  $\underline{u} := \{u_{k+\kappa}\}_{\kappa=-\infty}^{\infty}$ ,  $u_{k+\kappa} \in \mathbb{R}$ . Der Wert

$$B_D = \min_{x_k, x'_k, \underline{u}} \frac{\|\sqrt{T}\mu^\kappa \Psi_D(k+\kappa, k, x_k, \underline{u}) - \sqrt{T}\mu^\kappa \Psi_D(k+\kappa, k, x'_k, \underline{u})\|_{\kappa \in (-\infty, 0]}}{|x_k - x'_k|}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (4.58)$$

heißt Beobachtbarkeitsmaß des mit der Abtastzeit  $T$  diskretisierten Systems nach Abschnitt 2b.  $\square$

### Beispiel diskretisiertes lineares System

Nach der Diskretisierung des Systems, das mit Gleichungen (4.46) und (4.47) beschrieben ist, mit der Abtastzeit  $T > 0$  erhält man

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k \quad (4.59)$$

$$y_k = hx_k, \quad (4.60)$$

mit dem Zustand  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $u_k \in \mathbb{R}$  und dem Ausgang  $y_k \in \mathbb{R}$ . Die  $(n, n)$ -Systemmatrix  $A$  ergibt sich aus der Systemmatrix  $F$  des kontinuierlichen Systems über

$$A = e^{FT}, \quad (4.61)$$

die  $(n, 1)$ -Eingangsmatrix  $b$  ergibt sich bei einem Halteglied 0. Ordnung aus der Systemmatrix  $F$  und der Eingangsmatrix  $g$  des kontinuierlichen Systems über das Faltungsintegral

$$b = \int_0^T e^{F(T-\tau)} g \, d\tau. \quad (4.62)$$

Die Ausgangsmatrix  $h$  des diskretisierten Systems ist identisch mit der Ausgangsmatrix  $h$  des kontinuierlichen Systems.

Sei  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_k, x'_k \in \mathbb{R}^n$  und  $\underline{u}$  eine beliebige Steuerfolge. Die Ausgangstrajektorien des diskretisierten Systems ergeben sich zu

$$\Psi_D(k+\kappa, k, x_k, \underline{u}) = h \left( A^\kappa x_k + \sum_{i=0}^{\kappa-1} A^{\kappa-(i+1)} b u_{k+i} \right), \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (4.63)$$

$$\Psi_D(k+\kappa, k, x'_k, \underline{u}) = h A^\kappa x'_k + \sum_{i=0}^{\kappa-1} A^{\kappa-(i+1)} b u_{k+i}. \quad (4.64)$$

Für die Differenz zweier diskreter Ausgangstrajektorien gilt dementsprechend

$$\Psi_D(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}) - \Psi_D(k + \kappa, k, x'_k, \underline{u}) = hA^\kappa(x_k - x'_k). \quad (4.65)$$

Das Beobachtbarkeitsmaß für ein lineares diskretisiertes System ergibt sich damit zu<sup>6</sup>

$$B_D = \min_{x_k, x'_k, \underline{u}} \frac{\|\sqrt{T}h(\mu A)^\kappa(x_k - x'_k)\|_{\kappa \in (-\infty, 0]}}{|x_k - x'_k|} \quad (4.66)$$

$$= \min_{x_k, x'_k, \underline{u}} \frac{\left[ \sum_{\kappa=-\infty}^0 (x_k - x'_k)(\mu A)^{* \kappa} h^* h(\mu A)^\kappa(x_k - x'_k) T \right]^{\frac{1}{2}}}{|x_k - x'_k|}. \quad (4.67)$$

Mit der Bezeichnung<sup>7</sup>

$$P_D = \sum_{\kappa=-\infty}^0 (\mu A)^{* \kappa} h^* h(\mu A)^\kappa T \quad (4.68)$$

erhält man daraus

$$B_D = \min_{x_k, x'_k, \underline{u}} \frac{[(x_k - x'_k)^* P_D (x_k - x'_k)]^{\frac{1}{2}}}{|x_k - x'_k|} \quad (4.69)$$

$$= \min_{x_k, x'_k} \frac{[\lambda_{\min}\{P_D\}]^{\frac{1}{2}} |x_k - x'_k|}{|x_k - x'_k|} \quad (4.70)$$

$$= [\lambda_{\min}\{P_D\}]^{\frac{1}{2}} \quad (4.71)$$

Für  $\mu = e^{\alpha T}$  und  $T \rightarrow 0$  geht das Beobachtbarkeitsmaß des linearen diskretisierten Systems in das Beobachtbarkeitsmaß des kontinuierlichen Systems über, denn dann gilt mit Gleichung (4.61)

$$\lim_{T \rightarrow 0} P_D = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{\kappa=-\infty}^0 (\mu A)^{* \kappa} h^* h(\mu A)^\kappa T \quad (4.72)$$

$$= \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{\kappa=-\infty}^0 (e^{\alpha T} e^{FT})^{* \kappa} h^* h(e^{\alpha T} e^{FT})^\kappa T \quad (4.73)$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(F+\alpha I)^* \tau} h^* h e^{(F+\alpha I) \tau} d\tau \quad (4.74)$$

$$= P_C \quad (4.75)$$

Das Beobachtbarkeitsmaß des diskretisierten Systems ändert sich mit der Abtastzeit  $T$ .

<sup>6</sup>eine geeignete Wahl von  $\mu$  wäre  $\mu > [\min_i |\lambda_i\{A\}]^{-1}$

<sup>7</sup>Auch bei  $P_D$  handelt es sich um die Gramsche Matrix, allerdings jetzt für das diskretisierte System.

#### 4.4.4 Anwendungen

##### a) Simulationsbeispiel für ein lineares System

Es wird nun beispielhaft für ein kontinuierliches System zweiter Ordnung das Beobachtbarkeitsmaß berechnet. Anschließend wird das System mit der (noch nicht festgelegten) Abtastzeit  $T > 0$  diskretisiert. Für verschiedene Abtastzeiten wird dann das Beobachtbarkeitsmaß des diskretisierten Systems berechnet. So kann der Zusammenhang zwischen Abtastzeit und Beobachtbarkeitsmaß des diskretisierten Systems betrachtet werden. Im Verlauf des Beobachtbarkeitsmaßes über die Abtastzeit sollten die bekannten Zusammenhänge für den Erhalt der Beobachtbarkeit bei linearen Systemen wieder erkennbar sein.

Betrachtet wird das homogene kontinuierliche System (Bei linearen Systemen hat der Eingang keinen Einfluss auf die Beobachtbarkeit, daher wird er als Null angenommen.):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x \quad (4.76)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \quad (4.77)$$

Für dieses System lautet die für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  definierte Zustandstrajektorie, die durch den Punkt  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  geht,

$$\Phi(t + \tau, t, x) = e^{F\tau} x \quad (4.78)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(2\tau) & \sin(2\tau) \\ -\sin(2\tau) & \cos(2\tau) \end{bmatrix} x. \quad (4.79)$$

Die gewichtete Ausgangstrajektorie lautet entsprechend Gleichung (4.77) und Gleichung (4.79)

$$e^{\alpha\tau} \Psi(t + \tau, t, x) = e^{\alpha\tau} \begin{bmatrix} \cos(2\tau) - \sin(2\tau) & \cos(2\tau) + \sin(2\tau) \end{bmatrix} x. \quad (4.80)$$

Damit erhält man die Matrix  $P_C$

$$P_C = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} \begin{bmatrix} \cos(2\tau) - \sin(2\tau) \\ \cos(2\tau) + \sin(2\tau) \end{bmatrix} e^{\alpha\tau} \begin{bmatrix} \cos(2\tau) - \sin(2\tau) & \cos(2\tau) + \sin(2\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (4.81)$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha\tau} \begin{bmatrix} [\cos(2\tau) - \sin(2\tau)]^2 & \cos^2(2\tau) - \sin^2(2\tau) \\ \cos^2(2\tau) - \sin^2(2\tau) & [\cos(2\tau) + \sin(2\tau)]^2 \end{bmatrix} d\tau \quad (4.82)$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha\tau} \begin{bmatrix} 1 - \sin(4\tau) & \cos(4\tau) \\ \cos(4\tau) & 1 + \sin(4\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (4.83)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 + 4} & \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + 4^2} \\ \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + 4^2} & \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 + 4} \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Das Beobachtbarkeitsmaß für das kontinuierliche System ergibt sich dann zu

$$B_C = \left[ \lambda_{\min} \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha^2+4} & \frac{2\alpha}{4\alpha^2+4^2} \\ \frac{2\alpha}{4\alpha^2+4^2} & \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2+4} \end{array} \right] \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.85)$$

Das mit der Abtastzeit  $T$  diskretisierte System lautet

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(2T) & \sin(2T) \\ -\sin(2T) & \cos(2T) \end{bmatrix} x_k \quad (4.86)$$

$$y_k = [1 \quad 1] x_k \quad (4.87)$$

Laut beispielsweise [2] bleibt bei der Diskretisierung von linearen beobachtbaren Systemen Beobachtbarkeit erhalten, wenn zwei verschiedene Eigenwerte des kontinuierlichen Systems auf zwei verschiedene Eigenwerte des diskretisierten Systems abgebildet werden. Für dieses Beispiel bleibt demzufolge Beobachtbarkeit erhalten, wenn mit  $j := \sqrt{-1}$  gilt

$$e^{j2T} \neq e^{-j2T} \quad (4.88)$$

$$\Rightarrow T \neq i\frac{\pi}{2}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.89)$$

Wählt man im Gegensatz dazu  $T = i\frac{\pi}{2}$ , so ergibt sich die Systemmatrix des diskretisierten Systems zu

$$\begin{bmatrix} \cos(i\pi) & 0 \\ 0 & \cos(i\pi) \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

und man sieht sofort, dass das diskretisierte System nicht mehr beobachtbar ist.

Das Beobachtbarkeitsmaß für das diskretisierte System ergibt sich gemäß Gleichung (4.68) und Gleichung (4.71) mit  $\mu = e^{\alpha T}$  zu

$$B_D = \left[ \lambda_{\min} \left\{ \sum_{\kappa=-\infty}^0 e^{2\kappa\alpha T} \begin{bmatrix} \cos(2T) & -\sin(2T) \\ \sin(2T) & \cos(2T) \end{bmatrix}^{\kappa} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2T) & \sin(2T) \\ -\sin(2T) & \cos(2T) \end{bmatrix}^{\kappa} T \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.91)$$

Dieses wird für verschiedene  $T \in (0, 2\pi]$  näherungsweise berechnet. In Abbildung 4.2 ist der Verlauf des Beobachtbarkeitsmaßes für das diskretisierte System über der Abtastzeit aufgetragen. Zum Vergleich ist das Beobachtbarkeitsmaß des kontinuierlichen Systems als Konstante eingezeichnet. Man erkennt, dass das Beobachtbarkeitsmaß genau für die Abtastzeiten gleich Null wird, für die das diskretisierte System nicht beobachtbar ist, also für  $T = i\pi/2, i \in \mathbb{N}$ . Außerdem sieht man für wachsendes  $T$  eine Tendenz zu kleineren Werten von  $B_D$ . Für kleine Abtastzeiten nähert sich das Beobachtbarkeitsmaß des diskretisierten Systems an das Beobachtbarkeitsmaß des kontinuierlichen Systems an.

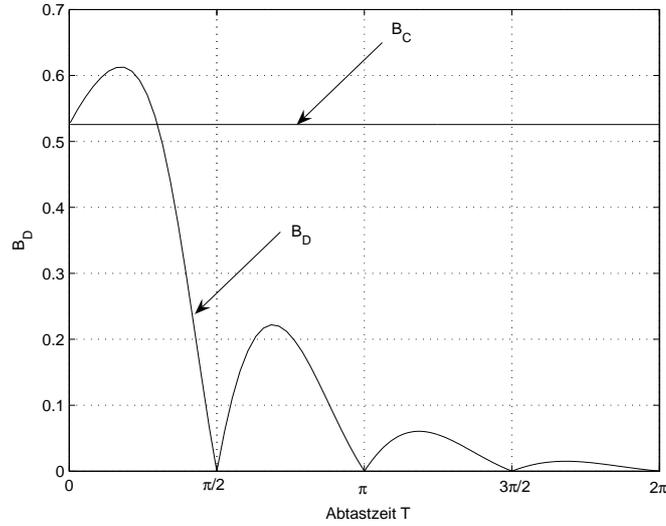


Abbildung 4.2: Beobachtbarkeitsmaß des kontinuierlichen und des mit verschiedenen Abtastzeiten diskretisierten Systems,  $\alpha = 1$

### b) allgemeiner Fall

Die Berechnung des Beobachtbarkeitsmaßes nach Definition 8 bzw. Definition 9 für ein nichtlineares System lässt sich in der Regel nicht auf die Berechnung der Eigenwerte einer konstanten Matrix zurückführen. Aber man könnte in der Praxis im Prinzip auf numerischem Wege wie folgt vorgehen:

- Wahl einer angemessen großen Konstante  $\sigma > 0$
- Auswahl einer repräsentativen Menge  $\mathcal{U}_{part}$  mit endlich vielen Elementen aus der Menge der möglichen Eingangssignale  $\mathcal{U}$
- Auswahl einer repräsentativen Menge  $\mathcal{X}$  mit endlich vielen Elementen aus dem Zustandsraum  $\mathbb{R}^n$
- (numerische) Berechnung der Größe

$$\bar{B}_C = \min_{x, x', u(\cdot)} \frac{\left[ \int_{-\sigma}^0 (e^{\alpha\tau} (\Psi(t+\tau, x, u(\cdot)) - \Psi(t+\tau, x', u(\cdot))))^2 d\tau \right]^{1/2}}{|x - x'|} \quad (4.92)$$

für alle  $x, x' \in \mathcal{X}, u(\cdot) \in \mathcal{U}_{part}$

- Wahl der Abtastzeit  $T$
- Bestimmung der größten natürlichen Zahl  $\nu$ , so dass gilt  $\nu T \leq \sigma$

- Auswahl einer repräsentativen Menge  $\mathcal{U}_{D,part}$  von Eingangsfolgen  $\underline{u} := \{u_{k+i}\}_{i=-\nu}^0$ .
- numerische Berechnung der Größe

$$\bar{B}_D(T) = \min_{(x,x',u(\cdot))} \frac{\left[ \sum_{\kappa=-\nu}^0 (e^{\alpha\kappa T} (\Psi_D(k+\kappa,k,x_k,\underline{u}) - \Psi_D(k+\kappa,k,x'_k,\underline{u})))^2 T \right]^{1/2}}{|x - x'|} \quad (4.93)$$

für alle  $x_k, x'_k \in \mathcal{X}, \underline{u} \in \mathcal{U}_{D,part}$

Wegen der Zeitinvarianz der betrachteten Systeme kann man davon ausgehen, dass gilt  $t = t_0 + kT$ ,  $x = x_k$ , außerdem kann man auch die Berechnungen für eine beliebige Wahl von  $k$  bzw.  $t$  durchführen. Lemma 5 besagt, dass die  $\mathcal{L}_2$ - Norm der gewichteten Signale über ein unendliches Intervall äquivalent zur  $\mathcal{L}_2$  der ungewichteten Signale über ein endliches Intervall ist. Daher kann man sich für die numerische Berechnung auf ein endliches Intervall beschränken. Je mehr Punkte aus dem Zustandsraum und je mehr Eingangssignale bzw. Eingangsfolgen berücksichtigt werden, desto aussagekräftiger werden  $\bar{B}_C$  bzw.  $\bar{B}_D$ .

Eine solche Vorgehensweise ist aber nur theoretisch, weil der Rechenaufwand mit der Anzahl der betrachteten Möglichkeiten, und diese exponentiell mit der Quantisierungsdichte wachsen.

# Kapitel 5

## Ansätze in der Literatur

### 5.1 Steuerbarkeit

#### 5.1.1 Definition von Steuerbarkeit

Während für lineare Systeme Steuerbarkeit umfassend geklärt ist, gibt es für nichtlineare Systeme verschiedene Ansätze diese Systemeigenschaft zu definieren.

Ein Ansatz orientiert sich an der Definition für Steuerbarkeit linearer Systeme. Grob gesagt heißt ein System demnach steuerbar, wenn es möglich ist, von jedem beliebigen Punkt im Zustandsraum in jeden beliebigen Punkt des Zustandsraums zu gelangen, indem man eine geeignete Steuerfunktion verwendet. Der einzige Unterschied zur Definition von Steuerbarkeit für lineare Systeme ist, dass dies nicht in beliebig kurzer Zeit, sondern in endlicher Zeit geschehen soll. [31] bietet eine ausführliche Übersicht über diesen Ansatz. Dort werden die verschiedenen Begriffe wie globale und lokale Steuerbarkeit, globale und lokale Erreichbarkeit erläutert und - für analytische Systeme - Sätze zur Steuerbarkeit und Erreichbarkeit angegeben. Es wird, analog zum Linearen, eine Steuerbarkeitsmatrix hergeleitet, deren Rang Auskunft über die Steuerbarkeitseigenschaft des Systems gibt. Diese Matrix besteht aus so genannten Lie-Klammern, für deren Bildung die rechte Seite des betrachteten Systems hinreichend oft differenzierbar sein muss.

In dieser Arbeit wird die Klasse der global lipschitzstetigen Systeme betrachtet. Das bedeutet, dass die rechte Seite nicht unbedingt differenzierbar sein muss. Zur Analyse der Steuerbarkeitseigenschaft lipschitzstetiger Systems erscheint daher die oben beschriebene Vorgehensweise nicht geeignet. Es wird alternativ Steuerbarkeit als das betrachtet, was man benötigt um eine konkrete regelungstechnische Aufgabe zu lösen (siehe Kapitel 2). In dieser Arbeit ist die Aufgabe die (digitale) Regelung eines nichtlinearen lipschitzstetigen Systems an einer beliebigen Ruhelage. Die verwendete Definition von Steuerbarkeit des diskretisierten Systems ist ein Sonderfall der Definition von Steuerbarkeit, die in [25] verwendet wird. Steuerbarkeit für das kontinuierliche System wird dazu analog festgelegt.

### 5.1.2 Erhalt von Steuerbarkeit bei Diskretisierung

Der Erhalt der Steuerbarkeit bei Diskretisierung wird in der Literatur in den beiden Arbeiten [32] und [33] behandelt. Da in diesen Arbeiten Steuerbarkeit wie in [31] definiert wird, werden die Ergebnisse nur für glatte, analytische Systeme bzw. solche mit endlichen Lie-Algebren angegeben. Aus diesem Grund sind die Ergebnisse für die Betrachtung des Verhaltens lipschitzstetiger Systeme bei Diskretisierung nur bedingt relevant. Außerdem werden in diesen Veröffentlichungen spezielle differentialgeometrische Betrachtungen angestellt, die für Ingenieure im Allgemeinen schwer verständlich sind.

Aufgrund der praktischen Bedeutung der digitalen Regelung und der Größe der Klasse der lipschitzstetigen Systeme, gibt es allerdings eine Fülle von Arbeiten, die sich mit der digitalen Regelung dieser Klasse von Systemen befassen. Sie stellen, im Gegensatz zu der hier vorliegenden Arbeit, keine grundsätzlichen Betrachtungen über mögliche Definitionen von Steuerbarkeit und deren Erhalt bei Diskretisierung an, sondern befassen sich mit der Frage, ob ein diskreter Regler ein gegebenes System stabilisieren kann. Dabei werden verschiedene Ansätze des Reglerentwurfs untersucht. [3] gibt eine Übersicht über einige Resultate. [9], [4] und [5] beschäftigen sich beispielsweise mit der quasikontinuierlichen Regelung. Die Arbeiten [16], [17] und [18] prüfen, ob ein Regler, der für ein approximatives Modell des diskretisierten System entworfen wurde auch das diskretisierte Systems stabilisiert, bzw. wie man den Regler am besten entwirft oder „redesigned“, damit das diskretisierte System stabilisiert wird. In [19] wird schließlich der Zusammenhang zwischen Stabilität des diskreten Systems und Stabilität des Abtastsystems hergestellt.

Die Arbeit [6] beschäftigt sich mit der Regelbarkeit kontinuierlicher Systeme durch Zustandsvektor-Rückführung. Hier wird anfangs erläutert, dass lokal lipschitzstetige kontinuierliche nichtlineare Systeme, die nach einer Definition ähnlich wie in [25] steuerbar sind, nicht unbedingt durch eine stetige Zustandsvektorrückführung stabilisiert werden können. Es wird hier nachgewiesen, dass aus der asymptotischen Steuerbarkeit des betrachteten Systems die Existenz einer sog. „s-stabilisierenden“ Zustandsvektorrückführung folgt und umgekehrt. Das „s“ in „s-stabilisierbar“ steht für sampling. Es wird angenommen, dass zwischen zwei Abtastzeitpunkten das Eingangssignal konstant ist. Die Intention der Veröffentlichung ist, zu zeigen, dass eine (nicht stetige) stabilisierende Rückführung existiert. Dazu werden die Abtastzeitpunkte so gelegt, dass zu gewissen, benötigten Zeitpunkten ein Sprung in der Steuerfunktion möglich ist. Dies unterscheidet die Arbeit [6] grundlegend von der hier vorliegenden Arbeit. In der hier vorliegenden Arbeit wird die Abtastregelung betrachtet bei der man typischerweise von einer festen Abtastrate bzw. einem vorher festgelegten Abtastraster ausgeht. In [7] werden die Ergebnisse aus [6] erweitert.

## 5.2 Beobachtbarkeit

### 5.2.1 Definition von Beobachtbarkeit

In dieser Arbeit wird Beobachtbarkeit des kontinuierlichen Systems definiert wie in [24]. Beobachtbarkeit bedeutet, dass man Unterschiede im Systemzustand in den Ausgangssignalen sieht. Diese Betrachtung der Systemeigenschaft Beobachtbarkeit wird nötig, wenn man lipschitzstetige Systeme untersuchen möchte. Für eine Einordnung dieser Definition von Beobachtbarkeit in die Literatur siehe [34]. Für den diskreten Fall wird Beobachtbarkeit analog definiert. Diese Definition stimmt mit der in [29] verwendeten Definition von Beobachtbarkeit des diskreten Systems überein.

### 5.2.2 Erhalt von Beobachtbarkeit bei Diskretisierung

In der Fachliteratur beschäftigen sich die Arbeiten [35],[20] und [21] mit dem Erhalt von Beobachtbarkeit bei Diskretisierung. In diesen Veröffentlichungen werden glatte Systeme betrachtet. [35] arbeitet mit einer Definition von lokaler Beobachtbarkeit für das kontinuierliche und diskrete System. Zur Analyse werden sogenannte Lie-Algebren verwendet, wodurch sich [35] grundlegend von der hier vorliegenden Arbeit unterscheidet. Das Hauptresultat aus [20] besagt: Wenn ein glattes System beobachtbar für jedes Eingangssignal ist und gleichmäßig infinitesimal beobachtbar ist, dann ist das diskretisierte System beobachtbar für alle Abtastzeiten, die unter einer oberen Schranke liegen und für alle stückweise konstanten Eingangssignale die aus kontinuierlichen Eingangssignalen, deren Ableitung beschränkt ist, durch Abtasten und Halten konstruiert werden. In dieser Arbeit heißt ein System beobachtbar, wenn sich die Ausgangssignale zu mindestens einem Zeitpunkt auf einem betrachteten Intervall unterscheiden. Der Unterschied wird nicht bezogen auf den Unterschied in den zu beobachtenden Zuständen. Infinitesimale Beobachtbarkeit wird definiert über die Injektivität einer linearen Abbildung zwischen einem Vektorraum „ $T_x M$ “ und „ $L(\mathbb{R}^p)$ “. In [21] wird gezeigt, dass Beobachtbarkeit bei Diskretisierung fast überall erhalten bleibt, wenn man statt der infinitesimalen Beobachtbarkeit voraussetzt, dass das betrachtete kontinuierliche System analytisch ist. Da sich die vorliegende Arbeit aber mit lipschitzstetigen Systemen beschäftigt und die hier verwendete Definition von Beobachtbarkeit grundlegend anders ist, werden die Arbeiten hier nicht ausführlicher besprochen.

# Kapitel 6

## Abschließende Bemerkungen

Ein Regler, der auf einem Digitalrechner implementiert wird, ist ein (zeit)diskreter Regler. Setzt man einen solchen zeitdiskreten Regler zur Regelung eines kontinuierlichen Systems ein, erhält man einen so genannten Abtastregelkreis. In diesem Abtastregelkreis (s. Abbildung 1.2) befindet sich zwischen dem Reglerausgang und dem Streckeneingang ein Halteglied, zwischen Streckenausgang und Reglereingang ein Abtaster. Zur Analyse des Regelkreises und zum Reglerentwurf ist es sinnvoll, auch das kontinuierliche System in seiner zeitdiskreten Form darzustellen. Das geschieht dadurch, dass man Halteglied, kontinuierliches System und Abtaster zu einem Gesamtsystem zusammenfasst. Dieses (diskrete) Gesamtsystem heißt dann diskretisiertes System. Es ist im Allgemeinen abhängig von der bei der Diskretisierung verwendeten Abtastzeit. Man kann zeigen, dass ein diskreter Regler das diskretisierte System stabilisieren<sup>1</sup> kann, wenn es steuerbar und beobachtbar ist<sup>2</sup> (s. hierzu Kapitel 3.3, Kapitel 4.3 sowie die dort zitierten Arbeiten).

Es ist nun von Interesse, gesicherte Aussagen darüber zu machen, ob ein kontinuierliches System in einem Abtastregelkreis stabilisiert werden kann. Nach obigen Überlegungen ist dies der Fall, wenn aus der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit des kontinuierlichen Systems die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des diskretisierten Systems folgt.

Motiviert von den vorangegangenen Betrachtungen beschäftigte sich diese Arbeit mit der Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen sich Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen Systems auf das diskretisierte System übertragen. Die Untersuchungen wurden für Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit getrennt von einander durchgeführt.

Bei den Untersuchungen zur Steuerbarkeit zeigte sich: Steuerbarkeit des kontinuierlichen Systems bleibt für das diskretisierte System erhalten, wenn die Abtastzeit unter einer

---

<sup>1</sup>Unter „stabilisieren“ ist hier zunächst Stabilisierung an der Ruhelage Null zu verstehen. Für die Stabilisierung an einer beliebigen Ruhelage ist es vorteilhaft, das System für die Abweichung von der Ruhelage zu bilden und dieses dann zu stabilisieren (s. Kapitel 1).

<sup>2</sup>Der Zustand des kontinuierlichen Systems, das im diskretisierten System weiterexistiert, ist zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abtastzeitpunkten nach Lemma 1 entsprechend dem Zustand zum ersten Abtastzeitpunkt und dem Eingangssignal beschränkt.

oberen Schranke liegt. Diese obere Schranke bezieht sich nur auf die Abtastzeit, die bei der Diskretisierung eingangsseitig verwendet wird, also auf die Abtastzeit, mit der das Halteglied arbeitet. Wie schnell oder langsam ausgangsseitig abgetastet wird, spielt bei den Betrachtungen zur Steuerbarkeit keine Rolle.

In dieser Arbeit wurde, der Übersichtlichkeit halber, durchgängig angenommen, dass bei der Diskretisierung ein Halteglied 0. Ordnung verwendet wird. Im Beweis zur Erhaltung der Steuerbarkeit wird verwendet, dass der Unterschied zwischen einem kontinuierlichen (stabilisierenden) Eingangssignal und einem stückweise konstanten Eingangssignal proportional zur Abtastzeit beschränkt ist. Es besteht Anlass zu der Vermutung, dass sich der Beweis zur Erhaltung der Steuerbarkeit auch auf Halteglieder höherer Ordnung erweitern lässt.

Bei den Untersuchungen zur Beobachtbarkeit zeigte sich: Beobachtbarkeit des kontinuierlichen Systems bleibt für das diskretisierte System erhalten, wenn die Abtastzeit unter einer oberen Schranke liegt. Diese obere Schranke bezieht sich nur auf die Abtastzeit, mit der das kontinuierliche System ausgangsseitig diskretisiert wird, also der (zeitliche) Abstand, in dem die Messungen der Ausgangstrajektorie des diskretisierten Systems vorliegen. Es spielt dabei keine Rolle, welches Eingangssignal auf das System wirkt. Dieser Feststellung sollte man besondere Beachtung schenken. Sie bietet nämlich einen möglichen Ansatz, die Existenz eines stabilisierenden Reglers in einem sog. „Multi-Rate-Sampling“-Regelkreis zu folgern.

Ein „Multi-Rate-Sampling“-Regelkreis ist ein Abtastregelkreis, in dem das Halteglied mit einer anderen Abtastzeit arbeitet, als der Abtaster. Ist das System mit der Abtastzeit am Systemausgang beobachtbar, und lässt sich das Eingangssignal (auf einem interessierenden Intervall) mit einer endlichen Anzahl von Elementen der Steuerfolge darstellen, so impliziert dies die Existenz eines Beobachters mit endlicher Einschwingzeit (s. [29]). Das bedeutet, nach einer endlichen Zeit liefert der Beobachter den Zustand des kontinuierlichen Systems zu Vielfachen der am Systemausgang vorliegenden Abtastzeit. Von diesem Zustand ausgehend könnte man theoretisch -die Kenntnis des Eingangssignals vorausgesetzt- auch den Zustand des kontinuierlichen Systems zu jedem beliebigen Zeitpunkt bestimmen. Ist das System mit der Abtastzeit am Eingang steuerbar, gibt es dafür eine stabilisierende Zustands-Vektor-Rückführung. Setzt man nun in diese Zustands-Vektor-Rückführung den mithilfe des Beobachters bestimmten Zustand ein, erhält man eine Beobachter-Zustands-Vektor-Rückführung, die sich nach endlicher Zeit wie die Zustands-Vektor-Rückführung verhält (da der Beobachter ja ein Beobachter mit endlicher Einschwingzeit ist). Für den Nachweis der Existenz eines stabilisierenden Reglers im „Multi-Rate-Sampling“-Regelkreis muss man noch sicherstellen, dass der Zustand während des Einschwingvorgangs des Beobachters relativ zu den Anfangsauslenkungen beschränkt ist.

Zentrales Ergebnis dieser Arbeit ist, dass Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des kon-

tinuierlichen Systems für das diskretisierte System erhalten bleiben, wenn die Abtastzeit unter einer oberen Schranke liegt. Die jeweiligen Beweise hierzu sind konstruktiv. Das heißt, anhand der entsprechenden Formeln können die jeweiligen oberen Schranken berechnet werden. Allerdings werden diese Schranken in der Regel sehr klein (und kleiner als erforderlich) sein. Das liegt daran, dass in den Beweisen zum Teil grobe Abschätzungen gemacht wurden.

Daher wurden ergänzend zu den Beweisen noch Maße für Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit definiert. Diese Maße sollen ein „Gefühl“ dafür vermitteln, wie gut oder wie schlecht ein System steuerbar bzw. beobachtbar ist. Die Motivation zur Einführung dieser Gütemaße war, zusätzlich zu den berechneten Schranken noch Kriterien zu liefern, die es (theoretisch) ermöglichen, auch die Eignung von Abtastzeiten zu überprüfen, die über den berechneten oberen Schranken liegen. Diese könnten ein Hilfsmittel für die Anwendung darstellen.

In der Anwendung sollte man vorrangig nicht daran interessiert sein, die Abtastzeit „so klein wie möglich“ zu machen. Es können bei der Realisierung einer Regelung technische Beschränkungen auftreten, die eine beliebig kleine Abtastzeit nicht zulassen. So rechnet beispielsweise ein Digitalrechner mit einem intern vorgegebenen Takt. Die Abtastzeit in einem Abtastregelkreis muss größer als dieser Takt sein. Eine weitere technische Beschränkung könnte beispielsweise durch die maximale Übertragungsrate ins Spiel kommen, wenn die Verbindung des Reglers zur Strecke über einen Feldbus realisiert werden soll.

Eine grundsätzliche Überlegung zur Wahl der Abtastzeit hängt mit der zeitlichen Änderung der Signale zusammen. Es ist eine erneute Messung des Ausgangssignals bzw. ein neues Element der Eingangsfolge erst dann sinnvoll, wenn sich der Zustand (im Hinblick auf Steuerung) bzw. der Ausgang (im Hinblick auf Beobachtung) erkennbar geändert hat. Erkennbar bedeutet dabei „deutlich oberhalb der (endlichen) Quantisierung“, die bei der Realisierung zusätzlich stattfindet. Andernfalls kann die Funktion der Regelung -auch deren Stabilität- u. U. nicht gewährleistet werden (s. [36]).

Die Wahl einer höheren Abtastzeit kann aber auch Vorteile bei der Berechnung eines Reglers bieten: Ein kontinuierliches System könnte schnelle stabile Dynamiken haben. Bei linearen Systemen assoziiert man mit diesem Begriff Einschwingvorgänge, die durch einen Eigenwert verursacht werden, der im Vergleich zu den übrigen Eigenwerten des Systems weit links liegt. Diskretisiert man ein solches System mit einer entsprechend großen Abtastzeit, können die stabilen Dynamiken schon nach wenigen Abtastschritten als eingeschwungen betrachtet werden. Deswegen bietet es sich an, für das System einen Regler anhand eines diskretisierten und um die schnellen Dynamiken reduzierten Systems zu entwerfen. Der Rechenaufwand für Entwurfsverfahren wie beispielsweise [25] wird dann erheblich reduziert.

# Anhang A

## Lemmata

Das folgende Lemma ist eine Erweiterung des bekannten Gronwall-Lemmas (s. [23]). Da die Erweiterung des Gronwall-Lemmas häufig in der Arbeit benutzt wird, wird es hier in der benötigten Form nochmals hergeleitet. Dabei werden die aus der Literatur bekannten „Rechentricks“ verwendet. An manchen Stellen in der Arbeit würde die Anwendung des einfachen Gronwall-Lemmas ausreichen; aus Gründen der Übersichtlichkeit wird aber immer auf das Lemma 1 verwiesen. Setzt man dort  $u = u' = 0$  erhält man das Gronwall-Lemma.

### Lemma 1

Betrachtet wird ein kontinuierliches System nach Abschnitt 2 mit Gleichung (2.1). Sei  $\mathcal{U}$  die Menge der Eingangssignale und  $u(\cdot), u'(\cdot) \in \mathcal{U}$  zwei beliebige Eingangssignale. Seien außerdem

$$\Delta u(\cdot) := u(\cdot) - u'(\cdot) \tag{A.1}$$

$$\Delta x_0 := x_0 - x'_0 = x(t_0) - x'(t_0) \quad , x_0, x'_0 \in \mathbb{R}^n \tag{A.2}$$

$$\Delta \Phi(\cdot, t_0, x_0, x'_0, u(\cdot), u'(\cdot)) := \Phi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot)) - \Phi(\cdot, t_0, x'_0, u'(\cdot)) \tag{A.3}$$

Die rechte Seite des Systems habe die Lipschitzeigenschaft

$$|f(x, u) - f(x', u')| \leq L(|x - x'| + |u - u'|), \quad x, x' \in \mathbb{R}^n, u, u' \in \mathbb{R}. \tag{A.4}$$

Dann gilt für den Unterschied zweier Trajektorien

$$|\Delta \Phi(t, t_0, x_0, x'_0, u(\cdot), u'(\cdot))| \tag{A.5}$$

$$\leq \begin{cases} e^{L(t-t_0)} |\Delta x_0| + \int_{t_0}^t e^{L(t-\tau)} L |\Delta u(\tau)| d\tau & t \geq t_0 \\ e^{L(t_0-t)} |\Delta x_0| - \int_{t_0}^t e^{L(-t+\tau)} L |\Delta u(\tau)| d\tau & t < t_0 \end{cases} . \tag{A.6}$$

**Beweis 1**

Die Ungleichung (A.6) wird für  $t \geq t_0$  und  $t < t_0$  getrennt hergeleitet. Für  $t \geq t_0$  werden folgende die Bezeichnungen

$$t := t_0 + s, \quad s \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\xi(s) := \Phi(t_0 + s, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad (\text{A.8})$$

$$\xi'(s) := \Phi(t_0 + s, t_0, x'_0, u'(\cdot)) \quad (\text{A.9})$$

$$\Delta\xi := \xi - \xi' \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{u}(s) := u(t_0 + s) \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{u}'(s) := u'(t_0 + s) \quad (\text{A.12})$$

$$\Delta\tilde{u} := \tilde{u} - \tilde{u}' \quad (\text{A.13})$$

verwendet. Damit ergibt sich

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = f(\xi(s), \tilde{u}(s)), \quad \xi(0) = x_0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d\xi'(s)}{ds} = f(\xi'(s), \tilde{u}'(s)), \quad \xi'(0) = x'_0 \quad (\text{A.15})$$

---


$$\frac{d\Delta\xi(s)}{ds} = f(\xi(s), \tilde{u}(s)) - f(\xi'(s), \tilde{u}'(s)), \quad \Delta\xi(0) = \xi(0) - \xi'(0) \quad (\text{A.16})$$

$$\left| \frac{d\Delta\xi(s)}{ds} \right| \leq L(|\Delta\xi| + |\Delta\tilde{u}|). \quad (\text{A.17})$$

Es gilt

$$|\Delta\xi(s)| = \left| \Delta\xi(0) + \int_0^s \frac{d\Delta\xi(s')}{ds'} ds' \right| \quad (\text{A.18})$$

$$|\Delta\xi(s)| \leq |\Delta\xi(0)| + \left| \int_0^s \frac{d\Delta\xi(s')}{ds'} ds' \right| \quad (\text{A.19})$$

$$\leq |\Delta\xi(0)| + \int_0^s \left| \frac{d\Delta\xi(s')}{ds'} \right| ds'. \quad (\text{A.20})$$

Mit der Definition

$$\zeta(s) := |\Delta\xi(0)| + \int_0^s \left| \frac{d\Delta\xi(s')}{ds'} \right| ds' \quad (\text{A.21})$$

erhält man

$$\frac{d\zeta(s)}{ds} = \left| \frac{d\Delta\xi(s')}{ds'} \right|_{s'=s} \quad (\text{A.22})$$

$$\leq L(|\Delta\xi| + |\Delta\tilde{u}|) \quad (\text{A.23})$$

$$\leq L(\zeta + |\Delta\tilde{u}|), \quad \zeta_0 = |\Delta\xi(0)| \quad (\text{A.24})$$

Aus dieser letzten Differentialungleichung wird im Folgenden eine obere Schranke für  $|\Delta\xi|$  hergeleitet.

$$\frac{d\zeta}{ds} - L\zeta \leq L|\Delta\tilde{u}| \quad (\text{A.25})$$

$$\int_0^s \left( \frac{d\zeta}{ds'} - L\zeta \right) e^{-Ls'} ds' \leq \int_0^s e^{-Ls'} L|\Delta\tilde{u}(s')| ds' \quad (\text{A.26})$$

$$\zeta(s)e^{-Ls} - \zeta(0)e^{-L0} \leq \int_0^s e^{-Ls'} L|\Delta\tilde{u}(s')| ds' \quad (\text{A.27})$$

$$\zeta(s)e^{-Ls} \leq \zeta(0)e^{-L0} + \int_0^s e^{-Ls'} L|\Delta\tilde{u}(s')| ds' \quad (\text{A.28})$$

$$\zeta(s) \leq \zeta(0)e^{L(s-0)} + \int_0^s e^{L(s-s')} L|\Delta\tilde{u}(s')| ds' \quad (\text{A.29})$$

Mit Gleichung (A.20) und Gleichung (A.29) erhält man insgesamt

$$|\Delta\xi(s)| \leq \zeta(s) \leq \zeta(0)e^{L(s-0)} + \int_0^s e^{L(s-s')} L|\Delta\tilde{u}(s')| ds'. \quad (\text{A.30})$$

Unter Verwendung der Gleichungen (A.7)-(A.13), sowie mit  $s' = \tau - t_0$  und  $\zeta(0) = |\Delta x_0|$  erhält man

$$|\Delta\Phi(t, t_0, x_0, x'_0 u(\cdot), u'(\cdot))| \leq |\Delta x_0| e^{L(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{L(t-\tau)} L|\Delta u(\tau)| d\tau, \quad t \geq t_0. \quad (\text{A.31})$$

Für  $t < t_0$  werden die Bezeichnungen

$$t := t_0 - s, \quad s < 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\xi(s) := \Phi(t_0 - s, t_0, x_0, u(\cdot)) \quad (\text{A.33})$$

$$\xi'(s) := \Phi(t_0 - s, t_0, x'_0, u'(\cdot)) \quad (\text{A.34})$$

$$\Delta\xi := \xi - \xi' \quad (\text{A.35})$$

$$\tilde{u}(s) := u(t_0 - s) \quad (\text{A.36})$$

$$\tilde{u}'(s) := u'(t_0 - s) \quad (\text{A.37})$$

$$\Delta\tilde{u} := \tilde{u} - \tilde{u}' \quad (\text{A.38})$$

verwendet. Damit ergibt sich

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = -f(\xi(s), \tilde{u}(s)), \quad \xi(0) = x_0 \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{d\xi'(s)}{ds} = -f(\xi'(s), \tilde{u}'(s)), \quad \xi'(0) = x'_0 \quad (\text{A.40})$$

---


$$\frac{d\Delta\xi(s)}{ds} = -f(\xi(s), \tilde{u}(s)) + f(\xi'(s), \tilde{u}'(s)), \quad \Delta\xi(0) = \xi(0) - \xi'(0) \quad (\text{A.41})$$

$$\left| \frac{d\Delta\xi(s)}{ds} \right| \leq L(|\Delta\xi| + |\Delta\tilde{u}|). \quad (\text{A.42})$$

Aufgrund der Betragsbildung ergibt sich rückwärts in der Zeit die gleiche Abschätzung wie vorwärts (vgl. Gleichung (A.17) und Gleichung (A.42)). Daher erhält man auch hier

$$|\Delta\xi(s)| \leq \zeta(s) \leq \zeta(0)e^{L(s-0)} + \int_0^s e^{L(s-s')}L|\Delta\tilde{u}(s')| ds'. \quad (\text{A.43})$$

Unter Verwendung der Gleichungen (A.32)-(A.38), sowie mit  $s' = -\tau + t_0$  und  $\zeta(0) = |\Delta x_0|$  erhält man

$$|\Delta\Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot), u'(\cdot))| \leq |\Delta x(t_0)| + e^{L(t_0-t)} - \int_{t_0}^t e^{L(-t+\tau)}L|\Delta u| d\tau, \quad t < t_0. \quad (\text{A.44})$$

□

### Lemma 2

Betrachtet wird das mit der Abtastzeit  $T$  diskretisiertes System nach Abschnitt 2b mit Gleichung (2.21). Die rechte Seite dieses Systems genügt einer Lipschitzbedingung, das heißt, es existiert eine Konstante  $L_D > 0$ , so dass für alle  $x_k, x'_k \in \mathbb{R}^n$  und alle  $u_k, u'_k \in \mathbb{R}$  gilt

$$|f_D(x_k, u_k) - f_D(x'_k, u'_k)| \leq L_D \left[ |x_k - x'_k| + |u_k - u'_k| \right]. \quad (\text{A.45})$$

### Beweis 2

Für die linke Seite von Ungleichung (A.45) gilt mit Gleichung (2.20)

$$\begin{aligned} & |f(x_k, u_k) - f(x'_k, u'_k)| = \\ & |\Phi(t_0 + kT + T, t_0 + kT, x_k, u_k) - \Phi(t_0 + kT + T, t_0 + kT, x'_k, u'_k)|. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Die Trajektorien  $\Phi(t_0 + kT + T, t_0 + kT, x_k, u_k)$  und  $\Phi(t_0 + kT + T, t_0 + kT, x'_k, u'_k)$  werden von dem kontinuierlichen System aus Abschnitt 2, Gleichung (2.1) erzeugt. Da die rechte Seite dieses kontinuierlichen Systems lipschitzstetig ist (s. Ungleichung (2.2)), gilt mit Lemma 1

$$\begin{aligned} & |\Phi(t_0 + kT + T, t_0 + kT, x_k, u_k) - \Phi(t_0 + kT + T, t_0 + kT, x'_k, u'_k)| \\ & \leq e^{LT}|x_k - x'_k| + \int_0^T e^{L(T-\tau)}L|u_k - u'_k|d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$= e^{LT}|x_k - x'_k| + [e^{LT} - 1]|u_k - u'_k| \quad (\text{A.48})$$

$$\leq e^{LT} \left[ |x_k - x'_k| + |u_k - u'_k| \right]. \quad (\text{A.49})$$

Mit der Definition

$$L_D := e^{LT} \quad (\text{A.50})$$

erhält man für das diskretisierte System die Lipschitzbedingung

$$|f_D(x_k, u_k) - f_D(x'_k, u'_k)| \leq L_D \left[ |x_k - x'_k| + |u_k - u'_k| \right]. \quad (\text{A.51})$$

**Lemma 3**

Betrachtet wird ein System nach Abschnitt 2, Gleichung (2.1). Sei  $\alpha$  eine Konstante größer als  $L$  (die Lipschitzkonstante des Systems). Dann ist der Ausdruck

$$\|e^{\alpha\tau}[\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))]\|_{\tau \in (-\infty, 0]} \quad (\text{A.52})$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}$  und  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  endlich, das heißt er ist definiert.

**Beweis 3**

Für  $\tau \leq 0$  gilt wegen Lemma 1 und mit  $\beta := \alpha - L > 0$

$$|e^{\alpha\tau}[\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))]| \quad (\text{A.53})$$

$$= |e^{\alpha\tau}h[\Phi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Phi(t + \tau, t, x', u(\cdot))]| \quad (\text{A.54})$$

$$\leq e^{\alpha\tau}|h||\Phi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Phi(t + \tau, t, x', u(\cdot))| \quad (\text{A.55})$$

$$\leq e^{\alpha\tau}|h|e^{-L\tau}|x - x'| \quad (\text{A.56})$$

$$\leq e^{\beta\tau}|h||x - x'| \quad (\text{A.57})$$

Für die  $\mathcal{L}_2$ - Norm ergibt sich deswegen:

$$\|e^{\alpha\tau}[\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))]\| \quad (\text{A.58})$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^0 |e^{\alpha\tau}[\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))]|^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.59})$$

$$\leq \left\{ \int_{-\infty}^0 [e^{\beta\tau}|h||x - x'|]^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.60})$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{2\beta} [|h||x - x'|]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.61})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\beta}} |h||x - x'| \quad (\text{A.62})$$

**Lemma 4**

Betrachtet wird das diskretisierte System nach Abschnitt 2b, Gleichung (2.21). Sei  $\mu$  eine positive Konstante so dass gilt  $\mu > \frac{1}{L_D}$  ( $L_D$ : Lipschitzkonstante des diskretisierten Systems). Der Ausdruck

$$\|\mu^\kappa[\Psi_D(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}) - \Psi_D(k + \kappa, k, x'_k, \underline{u})]\|_{\kappa \in (-\infty, 0]} \quad (\text{A.63})$$

ist für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_k, x'_k \in \mathbb{R}$  und alle Eingangsfolgen  $\underline{u} := \{u_{k+\kappa}\}_{\kappa=-\infty}^{\infty}$ ,  $u_{k+\kappa} \in \mathbb{R}$  endlich, das heißt, er ist definiert.

**Beweis 4**

Im Folgenden werden die Abkürzung

$$\Delta\Psi_D(k + \kappa, k, x_k, x'_k, \underline{u}) := \Psi_D(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}) - \Psi_D(k + \kappa, k, x'_k, \underline{u}) \quad (\text{A.64})$$

$$\Delta\Phi_D(k + \kappa, k, x_k, x'_k, \underline{u}) := \Phi_D(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}) - \Phi_D(k + \kappa, k, x'_k, \underline{u}) \quad (\text{A.65})$$

verwendet. Für den Zustand des diskretisierten Systems gilt nach Abschnitt 2

$$x_{k-1} = \Phi(t_0 + kT - T, t_0 + kT, x_k, u_D(\cdot)). \quad (\text{A.66})$$

Dementsprechend erhält man für den Unterschied mit Lemma 1

$$|x_{k-1} - x'_{k-1}| \quad (\text{A.67})$$

$$\begin{aligned} &= |\Phi(t_0 + kT - T, t_0 + kT, x_k, u_D(\cdot)) - \Phi(t_0 + kT - T, t_0 + kT, x'_k, u_D(\cdot))| \\ &\leq e^{LT} |x_k - x'_k|. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Somit kann man den Unterschied zweier Zustandstrajektorien des diskretisierten Systems bei gleichem Eingangssignal abschätzen mit

$$|\Phi_D(k + \kappa, k, x_k, \underline{u}) - \Phi_D(k + \kappa, k, x'_k, \underline{u})| \leq L_D^\kappa |x_k - x'_k|, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.69})$$

Dabei ist  $L_D$  die Lipschitzkonstante des diskretisierten Systems (vgl. Lemma 2).

Für die  $\ell_2$ -Norm ergibt sich damit

$$\|\mu^\kappa \Delta \Psi_D(k + \kappa, k, x_k, x'_k, \underline{u})\|_{\kappa \in (-\infty, 0]} \quad (\text{A.70})$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \sum_{\kappa=-\infty}^0 \left[ \mu^\kappa \Delta \Psi_D(k + \kappa, k, x_k, x'_k, \underline{u}) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \sum_{\kappa=-\infty}^0 \left[ \mu^\kappa h \Delta \Phi_D(k + \kappa, k, x_k, x'_k, \underline{u}) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

$$\leq \left[ \sum_{\kappa=-\infty}^0 \left[ \mu^\kappa |h| |\Delta \Phi_D(k + \kappa, k, x_k, x'_k, \underline{u})| \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.72})$$

$$\leq \left[ |h| |x_k - x'_k| \sum_{\kappa=-\infty}^0 [\mu^\kappa L_D^\kappa]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.73})$$

Da  $\mu$  so gewählt wurde, dass  $\mu L_D > 1$  ist, hat die Summe einen endlichen Wert.

### Lemma 5

Für das kontinuierliche Systems nach Abschnitt 2a mit Gleichung (2.1) und hinreichend große Konstanten  $\alpha, \sigma > 0$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- A) Es gibt eine Konstante  $c_e > 0$ , so dass für alle  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  und  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  gilt
 
$$\|\Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]} \geq c_e |x - x'|.$$
- B) Es gibt eine Konstante  $c_u > 0$ , so dass für alle  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  und  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  gilt
 
$$\|e^{\alpha\tau} \Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - e^{\alpha\tau} \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot))\|_{\tau \in (-\infty, 0]} \geq c_u |x - x'|.$$

### Beweis 5

Im Folgenden werden die Abkürzungen

$$\Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) := \Psi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Psi(t + \tau, t, x', u(\cdot)) \quad (\text{A.74})$$

$$\Delta\Phi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) := \Phi(t + \tau, t, x, u(\cdot)) - \Phi(t + \tau, t, x', u(\cdot)) \quad (\text{A.75})$$

verwendet.

#### i) Aus A) folgt:

$$\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]} \geq c_{e,g} |x - x'| \quad (\text{A.76})$$

Begründung:

$$\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]} \quad (\text{A.77})$$

$$= \left( \int_{-\sigma}^0 \left( e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.78})$$

$$\geq e^{-\alpha\sigma} \left( \int_{-\sigma}^0 \left( \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.79})$$

$$\geq e^{-\alpha\sigma} \|\Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]} \quad (\text{A.80})$$

$$\geq \underbrace{e^{-\alpha\sigma} c_e}_{c_{e,g}} |x - x'| \quad (\text{A.81})$$

#### ii) Aus A) folgt B):

Begründung:

$$\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in (-\infty, 0]}^2 \quad (\text{A.82})$$

$$= \underbrace{\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in (-\infty, \sigma]}^2}_{>0} + \|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]}^2 \quad (\text{A.83})$$

$$\geq c_{e,g}^2 |x - x'|^2 \quad (\text{A.84})$$

$$= c_u^2 |x - x'|^2, \quad (\text{A.85})$$

wenn  $\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in (-\infty, 0]}$  endlich ist. Dies ist laut Lemma 3 der Fall für  $\alpha > L$ .

#### iii) Aus B) folgt A):

Begründung:

$$\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in (-\infty, 0]}^2 \quad (\text{A.86})$$

$$= \|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in (-\infty, -\sigma]}^2 + \|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]}^2 \quad (\text{A.87})$$

Also ist:

$$\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{[-\sigma, 0]}^2 \quad (\text{A.88})$$

$$= \|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{(-\infty, 0]}^2 - \|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{(-\infty, -\sigma]}^2 \quad (\text{A.89})$$

Man erhält analog zu Lemma 3:

$$\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in (-\infty, -\sigma]} \quad (\text{A.90})$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{-\sigma} \left( e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot)) \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.91})$$

$$\leq \left( \int_{-\infty}^{-\sigma} \left( e^{\beta\tau} |x - x'| \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.92})$$

$$\leq \frac{e^{-2\beta\sigma}}{2\beta} |x - x'| \quad (\text{A.93})$$

Dabei ist  $\beta = \alpha - L > 0$ . Insgesamt ergibt sich dann

$$\|e^{\alpha\tau} \Delta\Psi(t + \tau, t, x, x', u(\cdot))\|_{\tau \in [-\sigma, 0]}^2 \quad (\text{A.94})$$

$$\geq c_u^2 |x - x'|^2 - \left( \frac{e^{-2\beta\sigma}}{2\beta} \right)^2 |x - x'|^2 \quad (\text{A.95})$$

$$\geq \underbrace{\left( c_u^2 - \left( \frac{e^{-2\beta\sigma}}{2\beta} \right)^2 \right)}_{c_e^2} |x - x'|^2 \quad (\text{A.96})$$

Die Konstante  $c_e$  ist größer Null für hinreichend großes  $\sigma$ .

iii) Aus ii) und iii) folgt, dass die beiden Aussagen A und B äquivalent sind.

# Anhang B

## Verzeichnis verwendeter Symbole

$\dot{x}$	:	Abkürzung für $\frac{dx}{dt}$
$t, \tau$	:	Element aus $\mathbb{R}$
$k, \kappa$	:	Element aus $\mathbb{Z}$
$T$	:	Abtastzeit
$\bar{T}$	:	Obere Schranke für die Abtastzeit
$y(\cdot)$	:	Ausgangssignal
$y_k \in \mathbb{R}$	:	Element der Ausgangsfolge
$\underline{y}$	:	Ausgangsfolge, $\underline{y} := \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$
$u(\cdot)$	:	Eingangssignal, Stellsignal
$u_k \in \mathbb{R}$	:	Element der Stellfolge
$\underline{u}$	:	Stellfolge $\underline{u} := \{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$
$\Phi(\cdot, t, x, u(\cdot))$	:	Zustandstrajektorie des kontinuierlichen Systems, definiert auf $\mathbb{R}$ , es gilt $x = \Phi(t, t, x, u(\cdot))$ und $x_0 = \Phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$
$\Psi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$	:	Ausgangstrajektorie des kontinuierlichen Systems, definiert auf $\mathbb{R}$ mit $\Psi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot)) = h\Phi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$
$\Phi_D(\cdot, k, x_k, \underline{u})$	:	Zustandstrajektorie des diskretisierten Systems, definiert auf $\mathbb{Z}$ , es gilt $x_k = \Phi_D(k, k, x_k, \underline{u})$ und $x_{k_0} = \Phi_D(k, k_0, x_{k_0}, \underline{u})$
$\Psi_D(\cdot, k, x_k, \underline{u})$	:	Ausgangstrajektorie des diskretisierten Systems, definiert auf $\mathbb{Z}$ mit $\Psi_D(\cdot, k, x_k, \underline{u}) = h\Phi_D(\cdot, k, x_k, \underline{u})$
$L$	:	Lipschitzkonstante für das kontinuierliche System
$\mathbb{C}_{[t_0, \infty]}^1$	:	Menge der einmal differenzierbaren Signale
$\ \cdot\ _{\tau \in [\tau_1, \tau_2]}$	:	$\mathcal{L}_2$ -Norm auf dem Intervall $[\tau_1, \tau_2]$
$\ \cdot\ _{\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]}$	:	$\ell_2$ -Norm auf dem Intervall $[\kappa_1, \kappa_2]$
$ \cdot $	:	(euklidische) Vektornorm
$\lambda(M)$	:	Eigenwert einer Matrix $M$
$\lambda_{min}(M)$	:	kleinster Eigenwert einer Matrix $M$
$\lambda_{max}(M)$	:	größter Eigenwert einer Matrix $M$
$v^*$	:	Transponierte des Vektors

# Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, J.: *Abtastregelungen*. Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [2] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Springer, 1997.
- [3] NEŠIĆ, D.; TEEL, A. R.: *Sampled-data control of nonlinear systems: An overview of recent results*. In: Moheimani, S. O. Reza (ed.), *Perspectives in robust control. Papers of the robust control workshop, Newcastle, Australia, December 6-8, 2000*. London: Springer. Lect. Notes Control Inf. Sci. 268, 2001, S. 221-239.
- [4] OWENS, D. H.; ZHENG, Y.; BILLINGS S. A.: *Fast sampling and stability of nonlinear sampled-data systems. I: Existence theorems*. IMA J. Math. Control Inf., Vol. 7, No. 1, 1990, S. 1-11.
- [5] ZHENG, Y.; OWENS, D. H. ; BILLINGS S. A.: *Fast sampling and stability of nonlinear sampled-data systems. II: Sampling rate estimators*. IMA J. Math. Control Inf., Vol. 7, No. 1, 1990, S. 13-33.
- [6] CLARKE, F. H.; LEDYAEV, Y. S.; SONTAG E. D.; SUBBOTIN A. I.: *Asymptotic controllability implies feedback stabilization*. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 42, No. 10, 1997, S. 1394-1407.
- [7] GRÜNE, L.: *Stabilization by sampled and discrete feedback with positive sampling rate*. Aeyels, D. (ed.) et al., *Stability and stabilization of nonlinear systems. Proceedings of the 1st workshop on Nonlinear control network, Gent, Belgium, March 15-16, 1999*. London: Springer. Lect. Notes Control Inf. Sci. 246, 1999, S. 165-182 .
- [8] CASTILLO, B.; DI GENNARO, S.; MONACO S.; NORMAN-CYROT D.: *On regulation under sampling*. IEEE Trans. Autom. Control, Vol 42, No. 6, 1997, S. 864-868.
- [9] LAILA D. S.; NEŠIĆ, D.; TEEL, A. R.: *Open and closed loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation*. Europ. Journal Contr., Vol. 8, No. 2, 2002, S. 109-125.
- [10] LAILA, D. S.; NEŠIĆ, D.: *Changing supply rates for input-output to state stable discrete-time nonlinear systems with applications*. Automatica, Vol. 39, No. 5, 2003, S. 821-835.

- [11] POLUSHIN, I. G.; MARQUEZ, H. J.: *Multirate versions of sampled-data stabilization of nonlinear systems*. Automatica, Vol. 40, No. 6, 2004, S. 1035-1041.
- [12] SHIM, H.; TEEL, A. R.: *Asymptotic controllability and observability imply semiglobal practical asymptotic stabilizability by sampled-data output feedback*. Automatica, Vol. 39, No. 3, 2003, S. 441-451.
- [13] MARCHAND, N.; ALAMIR, M.: *Asymptotic controllability implies continuous-discrete time feedback stabilizability*. Isidori, A. (ed.) et al., Nonlinear control in the year 2000. Vol. 2. London: Springer. Lect. Notes Control Inf. Sci. 259, 2001, S. 63-79 .
- [14] SONTAG, E. D.: *An approximation theorem in nonlinear sampling*. Mathematical theory of networks and systems, Proc. int. Symp., Beer Sheva/Isr. 1983, Lect. Notes Control Inf. Sci. 58, 1984 , S. 806-812 .
- [15] TROCH, I.: *Preserving stability properties under sampling*. Int. J. Syst. Sci., Vol. 20, No. 5, 1989, S. 733-745.
- [16] NEŠIĆ, D.; TEEL, A. R.; KOKOTOVIĆ P. V.: *Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations*. Syst. Control Lett., Vol. 38, No. 4-5, 1999, S. 259-270.
- [17] NEŠIĆ, D.; GRÜNE, L.: *Lyapunov-based continuous-time nonlinear controller redesign for sampled-data implementation*. Automatica, Vol. 41, No. 7, 2005, S. 1143-1156.
- [18] NEŠIĆ, D.; TEEL, A. R.: *A Framework for Stabilization of Nonlinear Sampled-Data Systems Based on Their Approximate Discrete-Time Models* . IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. 49, No. 7, 2004, S. 1103-1122.
- [19] NEŠIĆ, D.; TEEL, A. R. und E. D. SONTAG: *Formulas relating  $K\mathcal{L}$  stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems*. Syst. Control Lett., Vol 38, No. 1, 1999, S. 49-60.
- [20] AMMAR, S. und J.-C. VIVALDA: *On the preservation of observability under sampling*. Syst. Control Lett., Vol. 52, No. 1, 2004, S. 7-15.
- [21] AMMAR, S.: *Observability and observateur under sampling*. Int. J. Control, Vol. 79, No. 9, 2006, S. 1039-1045.
- [22] KREISSELMEIER, G.: *Struktur mit zwei Freiheitsgraden*. at - Automatisierungstechnik 47, No. 6, 1999, pp. 266 - 269.
- [23] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 1993.
- [24] ENGEL, R.; KREISSELMEIER, G.: *Nonlinear Approximate Observers for Feedback Control*. Systems Control Letters, Vol. 56, Issue 3, March 2007, pp. 230-235.

- [25] BIRKHÖLZER, T.: *Numerischer Reglerentwurf für nichtlineare Systeme auf der Grundlage eines Optimierungsansatzes*. Dissertations Druck Darmstadt, 1992, ISBN 3-8322-0646-9.
- [26] KREISSELMEIER, G.; BIRKHÖLZER, T.: *Numerical nonlinear Regulator Design*. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-39, Jan. 1994, S. 33 - 46.
- [27] SONTAG, E.D.: *Stability and stabilization: discontinuities and the effect of disturbances*. In: Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998), Vol. 528 of NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., S. 551-598. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [28] RIEGE, B.: *Strukturmaße für dynamische Systeme*. Forschungsbericht; [www.uni-duisburg-essen.de/imperia/md/content/srs/forschung/msrt\\_paper/1998/fb01-98.pdf](http://www.uni-duisburg-essen.de/imperia/md/content/srs/forschung/msrt_paper/1998/fb01-98.pdf) (Zugriffsdatum 05.8.2008) .
- [29] BERNHARD, T.: *Arbeitstitel: Ein-/ Ausgangsmodelle für Nichtlineare Systeme*. Dissertation, eingereicht, März, 2008.
- [30] FRÖHLICH, M.: *Ein robuster Zustandsbeobachter für ein semiaktives Fahrwerkregel-system*. Verein Deutscher Ingenieure [Fortschrittberichte VDI / 12] : Fortschrittberichte VDI ; Nr. 675 : Reihe 12, Verkehrstechnik, Fahrzeugtechnik, 2008, ISBN 978-3-18-367512-8.
- [31] PIECHOTTKA, U.: *Steuerbarkeit nichtlinearer Systeme*. at - Automatisierungstechnik, Vol. 37, No. 7, 1989, S. 268-275.
- [32] E.D., SONTAG: *Remarks on the preservation of various controllability properties under sampling*. Mathematical tools and models for control, systems analysis and signal processing, Vol. 3 (Toulouse/Paris, 1981/1982), Travaux Rech. Coop. Programme 567, pages 623-637. CNRS, Paris, 1983.
- [33] SONTAG, E. D.; SUSSMANN H.: *Accessibility under sampling*. Proc. IEEE Conf. Dec and Control, Orlando, Dec. 1982.
- [34] ENGEL, R.: *Zustandsbeobachter für nichtlineare Systeme*. Dissertation, Shaker, 2002, ISBN 3-8322-0646-9.
- [35] SONTAG, E.D.: *A concept of local observability*. Syst. Control Lett., Vol. 5, 1984, S. 41-47.
- [36] MEVENKAMP, M.: *Quantisierungseffekte bei der digitalen Regelung mit kleiner Ab-tastzeit*. VDI-Verlag, 1991, ISBN 3-18-145108-8.