

Thomas Bernhardt

Ein-/Ausgangsmodelle
für nichtlineare Systeme

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Elektrotechnik / Informatik der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. G. Kreißelmeier
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. A. Linnemann

Tag der mündlichen Prüfung

26. Juni 2008

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2008
ISBN 978-3-89958-444-5
URN: urn:nbn:de:0002-4446

© 2008, kassel university press GmbH, Kassel
www.upress.uni-kassel.de

Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel
Printed in Germany

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2004 bis 2008 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Regelungs- und Systemtheorie der Universität Kassel.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Kreißelmeier für seine intensive Unterstützung und die hilfreichen Anregungen, sowie Herrn Prof. Dr. rer. nat. A. Linnemann für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Bei den Kollegen des Fachgebietes bedanke ich mich für das freundschaftliche und positive Arbeitsklima.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mir dies alles ermöglicht hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Thema der Arbeit	5
1.2	Literatur	8
2	Systeme im Zustandsraum	11
2.1	Systeme in kontinuierlicher Zeit	11
2.2	Diskretisierung	12
2.3	Zeitdiskrete Systeme	13
3	Beobachter	15
3.1	Beobachtungsprinzip	15
3.1.1	Historien und Beobachtungsabbildung	15
3.1.2	Umkehrabbildung	19
3.2	Länge der Historien	21
3.2.1	Notwendige Länge der Historien	21
3.2.2	Beobachtung mit Historien der Länge $N = n$	23
3.2.3	Beobachtung mit Historien der Länge $N > n$	25
3.3	Vom Beobachtungsprinzip zum Beobachter	29
3.3.1	Der Beobachter	29
3.3.2	Erweiterte Umkehrabbildung \tilde{Q}	30
3.3.3	Konsistenz und Konvergenz des Beobachters	32
4	E/A-Modellierung	35
4.1	Vom Zustands-Beobachter zum E/A-Modell	35
4.2	Stabile und instabile Einbettung	40
4.2.1	Existenz einer stabilen Einbettung	43
5	Regelung	47
5.1	Von der ZVR für Σ zur ZVR für M	47
5.2	Von der ZVR für M zur BZVR für M und Σ	50

6	Abschließende Betrachtung und Ausblick	55
A	Sätze, Lemmata und Beweise	57
A.1	Beibehaltung der Lipschitz-Stetigkeit bei der Diskretisierung	57
A.2	Lipschitz-stetige Fortsetzung	59
A.3	Lipschitz-Stetigkeit des Modells M^*	61
B	Beispiele und Ergänzungen	63
B.1	Nachweis der Beobachtbarkeit für Bsp. 3.4	63
B.2	Berechnung der Beobachtungsabbildung zu Beispiel 3.5	64
B.3	Vergleich mit Luenberger Beobachter bei linearen Systemen	65
B.4	Lineares Modellbeispiel ohne Einbettung	66
B.5	Stabile Einbettung mittels Projektion	68
B.6	Asymptotisch stabile Einbettung	69
C		71
C.1	Verwendete Bezeichnungen	71
C.2	Verwendete Konstanten	72
	Literaturverzeichnis	73

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Thema der Arbeit

Um dynamische Systeme zu regeln, stehen in der heutigen Zeit fast immer Mikroprozessoren oder rechnergestützte Anlagen zur Verfügung. Während die dynamischen Systeme zumeist zeit-kontinuierlich sind, können die Rechner lediglich mit zeit-diskreten Werten arbeiten. Von den gemessenen (abgetasteten) Signalen werden dem Rechner, d.h. „Regler“, also nur die Werte von den sogenannten Abtastzeitpunkten übergeben, aus diesen wird dann eine Stellgröße für das System berechnet.

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass eine Zustandsraumbeschreibung für das System vorliegt. Eine Zustandsraumdarstellung ist ein mathematisches Modell des Systems, welches die Bewegungen des Systems mittels der Zustände x beschreibt. Der Ausgang y wird als Funktion von den Zuständen x dargestellt.

Die Theorie für die Regelung solcher Systeme (linear oder nichtlinear) ist sehr weit vorangeschritten, als Beispiel sei die Flachheitsbasierte Regelung genannt, siehe [14], [16] und die darin erwähnten Artikel. Um die Regelungskonzepte anwenden zu können, wird zunächst davon ausgegangen, dass alle Zustände des Systems messbar sind (Zustandsvektorrückführung).

Da sich i. a. nicht alle Zustände messen lassen, wird das Konzept der Zustandsbeobachtung verwendet. Ein Zustandsbeobachter (kurz: Beobachter) erzeugt aus den Eingangs- und Messsignalen eines Systems einen Schätzwert \hat{x} der gegen den Systemzustand x konvergiert.

Die Theorie über Beobachter ist noch nicht so fortgeschritten, wie die über die Regelung. Es werden häufig spezielle Anforderungen an die Eigenschaften des Systems gestellt und der konkrete Beobachterentwurf stellt sich i. a. komplizierter dar, als der Reglerentwurf.

Bei linearen Systemen können aufgrund der Separation von Regler und Beobachter

beide Konzepte unabhängig voneinander und sich gegenseitig ergänzend verwendet werden und der somit erhaltene Regler mit Beobachter stabilisiert das System. Bei nichtlinearen Systemen ist die Separation von Regler und Beobachter nicht selbstverständlich, so dass hier nicht einfach jeder Beobachter und jeder Regler zusammen verwendet werden kann.

Eine weitere Möglichkeit, Systeme mathematisch zu modellieren, ist die E/A-Darstellung. In dieser wird der aktuelle Wert des Ausgangs direkt aus den zurückliegenden Ein- und Ausgangsmessungen (Historien) bestimmt.

Der Übergang von einer Zustandsraumdarstellung zu einer E/A-Darstellung ist für lineare Systeme recht einfach (wird in dieser Arbeit mit angesprochen). Für Nichtlineare Systeme ist der Übergang nicht allgemein geklärt und ist ein Ziel dieser Arbeit. Um dabei möglichst allgemein zu bleiben, werden nur geringe Anforderungen an das System gestellt.

Betrachtet man die Historien der E/A-Darstellung als Zustände, so stellt ein einfacher Speicher einen Beobachter für diese Systembeschreibung dar. Um ein E/A-Modell, statt eines Zustandsraummodells, für Systeme zu erstellen, muss also lediglich ein Speicher für die Historien des Systems zur Verfügung stehen.

Wenn bekannt ist, wie sich der Ausgang aus den Historien berechnen lässt, so lässt sich mit dieser Berechnungsvorschrift und den Speichern ein E/A-Modell des Systems erstellen. Ist lediglich die Struktur der Berechnung bekannt, so kann diese anhand von Systemmessungen numerisch approximiert (adaptiert) werden.

Folgende 2 Eigenschaften von E/A-Modelle sind für die Regelung von Vorteil:

Mit Messwerten vom System lassen sich E/A-Modelle initialisieren und können dann verwendet werden, um eine Prädiktion für den Verlauf des Systemausgangs zu erstellen. Erstellt man zusätzlich noch ein Gütemaß, so lässt sich mit einer Optimierung ein Prädiktiver Regler finden (siehe hierzu z. B. [13] und die dort genannte Literatur).

Da der Beobachter für ein E/A-Modell recht einfach zu finden ist (Speicher), kann ein Regelkonzept, welches das Modell stabilisiert, mit einem relativ einfachem Beobachter auch für das System verwendet werden (wird auch in dieser Arbeit gezeigt).

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist die Dissertation von Herrn Engel [3] sowie die darauf aufbauende Arbeit [4] von Engel und Kreißelmeier.

In diesen Arbeiten wird ein Beobachterkonzept vorgestellt und verwendet, bei dem aus den kontinuierlichen E/A-Historien der aktuelle Zustand rekonstruiert wird. Genauer gesagt, wird aus einer approximativ gespeicherten Historie ein endlich genauer Schätzwert \hat{x} bestimmt. Die kontinuierlichen Historien werden approximiert, da sie von $-\infty$ bis t (aktuelle Zeit) gespeichert werden müssen und dies geht mit

endlichdimensionalen Filtern eben nur approximativ.

Da diese Approximation und die endliche Genauigkeit des Beobachters beim Übergang zum Modell zu nicht so leicht zu überblickenden Eigenschaften führen würden, wird die Betrachtung folgendermaßen geändert. Zum einen werden statt kontinuierlicher Historien nun diskrete Historien betrachtet, demzufolge natürlich auch eine diskrete Zustandsdarstellung der Strecke mit stückweise konstantem Eingangssignal u . Weiterhin wird anstelle des unendlichen Intervalls der Historien nun ein endliches Intervall betrachtet. Durch die diskrete Betrachtung und das endliche Intervall, ist es nun möglich, die Historien exakt abzuspeichern.

Dies führt zu dem in Kapitel 3 vorgestellten Beobachter, dieser bestimmt aus endlich vielen Messwerten der E/A-Historien den Zustand zum nächsten Abtastzeitpunkt. Es wird der nächste Zustand bestimmt, da dieser, bzw. der entsprechende Ausgangswert, später für das E/A-Modell benötigt wird. Dies hat auch den Vorteil, dass nach der Messung von Ein- und Ausgangssignal eine ganze Abtastperiode zu Berechnung zur Verfügung steht.

Für die Berechnung des Zustandes aus den Historien wird die sogenannte Umkehrabbildung verwendet. Eine wichtige Folgerung aus der verwendeten Definition der Beobachtbarkeit ist, dass es eine Anzahl N von Messungen gibt, für die die Umkehrabbildung eindeutig definiert ist. Jeder E/A-Historie mit N Messungen wird eindeutig der entsprechende Zustand zugeordnet. Die Umkehrabbildung muss dann ggf. noch von der Menge der E/A-Historien auf den $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ erweitert werden.

Da N Messwerte abgespeichert werden und dieses N höher als die Systemordnung sein kann, entsteht eine Einbettung der Strecke in den Zustandsraum des Beobachters. Dies ist auch schon von anderen Beobachtern bekannt, siehe hierzu z.B. High-Gain-Beobachter [8] und auch [15]. Hierbei werden mehr Ableitungen des Ausgangs verwendet als die Ordnung des Systems ist und somit wird der Zustand des Systems in einen Zustandsraum höherer Ordnung eingebettet. Beim High-Gain-Beobachter wird die Konvergenz des Beobachters durch Rückkopplung des Beobachtungsfehlers und eine sehr hohe Fehlerverstärkung erreicht. Bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Beobachter ist die Konvergenz schon vom Ansatz her und ohne zusätzliche Rückkopplung sichergestellt. Da die Messwerte vom System in ein Schieberegister (Dead-Beat-Filter) geschrieben werden, verschwinden die Startwerte des Beobachters komplett und die Konvergenz findet in den ersten N Schritten statt.

Im 4. Kapitel wird aus diesem Beobachterkonzept ein E/A-Modell erstellt. Im Grunde werden dazu lediglich die Messwerte vom Systemausgang durch die entsprechenden Werte des Beobachters ersetzt. Folglich gibt es immer ein E/A-Modell der Ordnung N , wenn das System die in Kapitel 2 aufgeführten Eigenschaften besitzt.

In dem Modell entstehen durch die Rückführung des Ausgangs und aufgrund der

Einbettung (höhere Systemordnung) zusätzliche Dynamiken, die in dem System nicht vorhanden sind. Diese sind nur abhängig von der Erweiterung der Umkehrabbildung und können stabil oder auch instabil sein. Dieser Punkt wird ebenfalls in dieser Arbeit aufgegriffen und gezeigt, dass sich die Einbettung des Systems in das Modell durch Rückkopplung stets stabilisieren lässt. Somit existiert immer ein E/A-Modell mit einer stabilen Einbettung, dieses ist vor allem für die Regelung, z.B. mittels Prädiktion, wichtig.

Im 5. Kapitel wird gezeigt, dass aus einem stabilisierenden Regler für das Modell mit stabiler Einbettung auch stets eine stabilisierende Ausgangsrückführung für die Strecke bestimmt werden kann. Zur Vereinfachung wird hierbei von einer existierenden Zustandsvektorrückführung für das System ausgegangen.

In dieser Arbeit geht es nicht darum, ein spezielles Entwurfsverfahren für einen Beobachter und ein E/A-Modell vorzustellen. Vielmehr soll lediglich gezeigt werden, was unter den hier betrachteten Voraussetzungen, die an das System gestellt werden, im Prinzip möglich ist.

1.2 Literatur

In der Literatur finden sich viele Artikel, die sich mit der diskreten Modellierung von Nichtlinearen Systemen befassen, folgend werden einige vorgestellt und ihre Ähnlichkeiten oder Unterschiede zu der vorliegenden Arbeit genannt.

Nichtlineare Modelle, die aus einer linearen Dynamik (Filter) und einer statischen Nichtlinearität bestehen, werden als Hammerstein- (Nichtlinearität am Eingang) und Wiener-Modelle (Nichtlinearität am Ausgang) bezeichnet, in [5] und [6] wird jeweils auf die Identifikation des statischen, nichtlinearen Anteils solcher Modelle eingegangen. In der vorliegenden Arbeit werden ebenfalls lineare Filter verwendet, aber durch die nichtlinearen, internen Kopplungen ergeben sich daraus letztlich nichtlineare Dynamiken.

Ein ähnlicher Ansatz wie in der vorliegenden Arbeit ist bei [7] gemacht worden. Dort werden aber lediglich Systeme betrachtet, die mit n (Anzahl der Systemzustände) Messungen der Ein- und Ausgangswerte beobachtbar sind und die dort erhaltenen Ein/Ausgangsmodelle sind nur in einer Umgebung der Ruhelage gültig.

Viele Ansätze in der Literatur beschäftigen sich mit der Identifikation von Modellen für Nichtlineare Systeme, welche das Ein/Ausgangsverhalten des Systems approximieren. Dies ist auch in [2] der Fall, hier werden aus Ein/Ausgangsinformationen „State-Affine“ Modelle erstellt, die polynomial in u sind. Dabei können diese Mo-

delle eine höhere Dimension als das eigentliche System haben, hierauf wird am Ende dieses Abschnittes nochmals eingegangen.

Die Lösung von linearen, diskreten Systemen der Form

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= A \cdot x_t + B \cdot u_t \\y_t &= C \cdot x_t\end{aligned}$$

mit Initialwert $x(0) = 0$ lässt sich folgendermaßen angeben

$$y_t = \sum_{k=0}^t C \cdot A^{t-1-k} \cdot B \cdot u_k \quad .$$

Mittels der sogenannten „Volterra Reihe“ kann etwas ähnliches auch für nichtlineare Systeme angegeben werden, diese hat die Form

$$y_t = h_0 + \sum_{k=0}^t h_{1,t-k} \cdot u_k + \sum_{k_1=0}^t \sum_{k_2=0}^t h_{2,t-k_1,t-k_2} \cdot u_{k_1} \cdot u_{k_2} + \dots \quad .$$

Für die Bestimmung der sogenannten „Volterra Kerne“ h_i gibt es in der Literatur mehrere Ansätze, siehe z. B. [11] sowie die darin genannte Literatur. Mittels dieser „Kerne“ können ebenfalls Modelle für das Ein-/Ausgangsverhalten von Nichtlinearen Systemen erstellt werden.

Ein weiterer Bereich, der bei der Modellierung angesprochen werden sollte, ist die Verwendung von Neuronalen Netzen, da diese immer häufiger verwendet werden um Nichtlineare Systeme zu modellieren. Hierzu sei auf [9] verwiesen, wo ein (wenn auch nicht ganz aktueller) guter Überblick über Neuronale Netze geliefert wird. Insbesondere wird in Abschnitt 5 ein Ansatz vorgestellt, bei dem $y(t)$ als Funktion der zurückliegenden Werte des Ein- und Ausgangs dargestellt wird und diese Funktion wird mit einem Neuronalem Netz approximiert, dazu werden lediglich Messwerte des Ein- und Ausgangs benötigt. In [10] wird näher auf diesen Ansatz eingegangen und neben der allgemeinen Form auch einfachere Spezialfälle für die Modelle vorgestellt. Allerdings wird dort wiederum angenommen, dass der Zustand des Systems mit n Messungen bestimmt werden kann.

In den angesprochenen Ansätzen wird häufig davon ausgegangen, dass lediglich n Messungen benötigt werden, um das System zu beobachten. Falls mehr Messungen notwendig sind, wird aber nicht weiter darauf eingegangen, was eine höhere Anzahl an Messungen für das Modell bedeutet. Dies ist aber ein zentraler Punkt dieser Arbeit. Wenn nämlich das Modell eine höhere Dimension hat als das System, dann

bedeutet dies auch, dass in dem Modell noch weitere Eigenbewegungen vorhanden sind und dass das System in dem Modell eingebettet ist. Je nach Eigenschaft der Eigenbewegungen redet man dann von einer stabilen oder instabilen Einbettung.

Da es im ersten Abschnitt dieser Arbeit um Beobachter mit Einbettung geht, wird hier noch auf [15] hingewiesen, darin geht es um kontinuierliche Beobachter mit Einbettung. Es werden dabei ähnliche Aspekte, bezüglich der Einbettung, wie in der vorliegenden Arbeit angesprochen, nur eben für kontinuierliche Beobachter.

Kapitel 2

Systeme im Zustandsraum

Ausgangspunkt dieser Arbeit sind dynamische Systeme in kontinuierlicher Zeit, die mit Abtaster und Halteglied diskretisiert worden sind. Die so definierte Klasse zeitdiskreter Systeme im Zustandsraum, die Beschreibungsformen sowohl vorwärts als auch rückwärts in der Zeit hat, sind der Gegenstand der Betrachtungen in dieser Arbeit.

2.1 Systeme in kontinuierlicher Zeit

In dieser Arbeit werden Systeme zugrunde gelegt, die eine Zustandsraumbeschreibung der Art

$$\Sigma_c : \begin{aligned} \dot{x} &= f_c(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

haben.

Darin sind $x \in \mathbb{R}^n$ * der Zustand, $u \in \mathbb{R}$ die Stellgröße (Eingangsgröße) und $y \in \mathbb{R}$ die Ausgangsgröße des Systems. Die Abbildungen $f_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ und $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ seien Lipschitz-stetig, d.h. für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$ und $u, u' \in \mathbb{R}$ gelte [†]

$$|f_c(x, u) - f_c(x', u')| \leq L_c|x - x'| + L_c|u - u'| \quad (2.2)$$

$$|h(x) - h(x')| \leq L_c|x - x'| \quad . \quad (2.3)$$

Außerdem sei $f_c(0, 0) = 0$ und $h(0) = 0$, d.h. der Ursprung der Koordinaten sei Ruhelage des Systems. Dabei bezeichne L_c die gemeinsame Lipschitzkonstante von f_c und h .

Aus der Lipschitzstetigkeit der Differentialgleichung folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, siehe z.B. [17]. Dies wird im folgenden Abschnitt bei der

*Falls f_c, h nur auf einem beschränktem Gebiet \mathcal{G} definiert sind, kann man sich f_c, h für $x \notin \mathcal{G}$ Lipschitz-stetig fortgesetzt vorstellen. Siehe hierzu z.B. Anhang A.2.

[†] $|\cdot|$ siehe Anhang C.1

Diskretisierung verwendet.

Des Weiteren wird für diese Arbeit benötigt, dass Σ_c in ausreichendem Maße beobachtbar ist (für Kapitel 5 auch steuerbar). Ausreichend beobachtbar bedeutet, dass das diskretisierte System gemäß der noch folgenden Definition 2.3.1 beobachtbar ist. Die Diskretisierung wird im folgenden Abschnitt erläutert. Zu den entsprechenden Voraussetzungen an Σ_c und zur Wahl einer geeigneten Abtastzeit wird auf [1] verwiesen.

2.2 Diskretisierung

Bei der Diskretisierung des Systems schränkt man die Betrachtung von der kontinuierlichen Zeit $t \in \mathbb{R}$ auf die diskreten Zeitpunkte kT , $k \in \mathbb{Z}$ ein, wobei $T > 0$ die sogenannte Abtastzeit ist.

Dabei wird mit einem Halteglied (0. Ordnung) das Eingangssignal $u(t)$ stückweise konstant gehalten

$$u(t) := u_k \quad t \in [kT, kT + T)$$

und mit einem Abtaster das Ausgangssignal abgetastet

$$y_k = y(kT) \quad .$$

Das auf diese Weise diskretisierte System ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Es hat als Eingangssignal die Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ und als Ausgangssignal die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

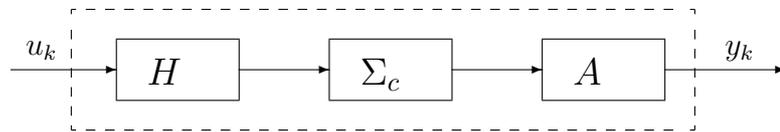


Abbildung 2.1: Kontinuierliches System mit Halteglied H und Abtaster A

Ausgehend von einem beliebigen Zustand des Systems zum Zeitpunkt kT , bezeichnet als $x_k := x(kT)$, und dem Stelleingang u_k kann man nun den Zustand x_{k+1} , durch Integration der Differentialgleichung des Systems im Intervall $[kT, kT + T]$ (Integration vorwärts in der Zeit) berechnen. Somit erhält man für die diskreten Zeitpunkte eine Systembeschreibung der Form

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \tilde{f}(x_k, u_k) \\ y_k &= h(x_k) \quad . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Anstelle von $\tilde{f}(x_k, u_k)$ wird, wo es übersichtlicher ist, die alternative Bezeichnung $\tilde{f}_{u_k}(x_k)$ verwendet.

Umgekehrt kann man von einem Zustand x_k ausgehend und dem zurückliegenden Stelleingang u_{k-1} den Zustand x_{k-1} durch entsprechende Integration der Differentialgleichung des Systems rückwärts in der Zeit berechnen. Dadurch erhält man eine Systembeschreibung der Form

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= f(x_k, u_{k-1}) \\ y_k &= h(x_k) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Anstelle von $f(x_k, u_{k-1})$ wird auch die alternative Bezeichnung $f_{u_{k-1}}(x_k)$ verwendet.

Die beiden Systemdarstellungen (2.4) und (2.5) sind äquivalent: Bei gleicher Eingangsfolge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ haben sie (bei gleichem „Anfangszustand“) dieselbe Trajektorie $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, da gilt

$$x_k = f_{u_k}(x_{k+1}) = f_{u_k}(\tilde{f}_{u_k}(x_k)) \quad .$$

Mit der Darstellung (2.4) lässt sich der *zukünftige* Systemzustand berechnen, was bei Fragen der Steuerung und Regelung (z.B. prädiktive Regelung) relevant ist. Umgekehrt liefert die Darstellung (2.5) den Zusammenhang zwischen x_k und den *zurückliegenden* Ein-/Ausgangsmessungen, was bei der Zustandsbeobachtung von Bedeutung ist.

2.3 Zeitdiskrete Systeme

In dieser Arbeit werden (unabhängig von ihrer Herkunft) dynamische Systeme in diskreter Zeit betrachtet, die in der Form

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad x_{k+1} &= \tilde{f}(x_k, u_k) \\ y_k &= h(x_k) \end{aligned} \quad (2.6)$$

und in der Form

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad x_{k-1} &= f(x_k, u_{k-1}) \\ y_k &= h(x_k) \end{aligned} \quad (2.7)$$

gleichermaßen dargestellt werden können.

Darin ist $k \in \mathbb{Z}$ die diskrete Zeit, und es sind $x_k \in \mathbb{R}^n$ der Zustand, $u_k \in \mathbb{R}$ die Stellgröße (Eingangssignal) und $y_k \in \mathbb{R}$ die Ausgangsgröße des Systems.

Für die weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass $f, \tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig sind, d.h. für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$ und $u, u' \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x, u) - f(x', u')| \leq L(|x - x'| + |u - u'|) \quad (2.8)$$

$$|\tilde{f}(x, u) - \tilde{f}(x', u')| \leq L(|x - x'| + |u - u'|) \quad (2.9)$$

$$|h(x) - h(x')| \leq L|x - x'| \quad (2.10)$$

Dabei ist L eine (gemeinsame) Lipschitzkonstante. Im Anhang A.1 wird gezeigt, dass die Diskretisierung eines Lipschitz-stetigen kontinuierlichen Systems Σ_c nach Abschnitt 2.1 stets ebenfalls Lipschitz-stetig ist.

Eine Lösung der Systemgleichungen in einem Intervall I umfasst die zeitlichen Verläufe des Eingangs u , des Zustands x und des Ausgangs y und bildet die Folge $\{u_k, x_k, y_k\}_{k \in I}$.

Eine zentrale Voraussetzung an das System ist, dass bei allen Lösungen der Systemgleichungen ein Zusammenhang zwischen x_k und der zugehörigen, sogenannten Ein-/Ausgangshistorie $\{u_{k-i}, y_{k-i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ besteht, den man als Beobachtbarkeit des Systems bezeichnet.

Definition 2.3.1. *Ein diskretes System Σ heißt beobachtbar, wenn eine natürliche Zahl N und eine Konstante $c > 0$ existieren, so dass für zwei beliebige Lösungen von Σ mit gleichem Eingangssignal, nennen wir sie*

$$\{u_{k-i}, x_{k-i}, y_{k-i}\}_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \{u_{k-i}, x'_{k-i}, y'_{k-i}\}_{i \in \mathbb{N}},$$

die Ungleichung

$$\left| \begin{bmatrix} y_{k-1} - y'_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-N} - y'_{k-N} \end{bmatrix} \right| \geq c|x_k - x'_k| \quad (2.11)$$

gilt. □

Dies bedeutet, dass bei einem beobachtbaren System zwei verschiedene Zustände x_k, x'_k bei gleicher Eingangshistorie anhand der Ausgangshistorien unterschieden werden können. Wie später gezeigt wird, kann somit der aktuelle Zustand x_k stets aus N zurückliegenden Ein-/Ausgangsmessungen bestimmt werden.

Kapitel 3

Beobachter

Ein Beobachter Ω für ein System Σ rekonstruiert aus Ein-/Ausgangsmessungen des Systems einen Schätzwert für den Systemzustand. Dies ist immer dann nötig, wenn der Systemzustand nicht vollständig gemessen werden kann, aber für Regelung oder Systemüberwachung benötigt wird.

In diesem Kapitel wird ein Beobachterkonzept vorgestellt, auf dem in den nachfolgenden Kapiteln der Entwurf eines E/A-Modells des Systems basiert. Hierzu wird als erstes das Beobachtungsprinzip erläutert und anschließend einige Aspekte genauer betrachtet.

3.1 Beobachtungsprinzip

In diesem Abschnitt wird zunächst das Prinzip der Beobachtung dargestellt. Es umfaßt die messbaren Ein-/Ausgangshistorien und die Definition einer Beobachtungsabbildung sowie deren Umkehrung.

3.1.1 Historien und Beobachtungsabbildung

Zu einem beliebigen Zeitpunkt, den wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als $k = 0$ annehmen dürfen, da Σ zeitinvariant ist, sei der Zustand $x_0 = x$. Durch Rekursion der Systemgleichung über N Schritte rückwärts in der Zeit (Gleichung (2.7)) erhält man

$$\begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_{-2} \\ \vdots \\ y_{-N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(f_{u_{-1}}(x)) \\ h(f_{u_{-2}}(f_{u_{-1}}(x))) \\ \vdots \\ h(f_{u_{-N}}(f \dots (f_{u_{-1}}(x)) \dots)) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Wir definieren

$$U := \begin{bmatrix} u_{-1} \\ u_{-2} \\ \vdots \\ u_{-N} \end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_{-2} \\ \vdots \\ y_{-N} \end{bmatrix}$$

und bezeichnen U als Eingangs- und Y als Ausgangshistorie der Länge N . Diese Historien stehen in der Praxis üblicherweise aus zurückliegenden Messungen zur Verfügung (vgl. Abbildung 3.1).

Für die rechte Seite von (3.1) führen wir die Bezeichnung

$$\mathcal{Y}(U, x) := \begin{bmatrix} h(f_{u_{-1}}(x)) \\ h(f_{u_{-2}}(f_{u_{-1}}(x))) \\ \vdots \\ h(f_{u_{-N}}(f \dots (f_{u_{-1}}(x)) \dots)) \end{bmatrix}.$$

ein und fassen $\mathcal{Y}(U, x)$ als Abbildung von x auf, wobei die Abbildung von dem verwendeten U abhängt. Dementsprechend wird

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(U, \cdot) : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ \mathcal{Y}(U, x) &= Y \end{aligned} \quad . \quad (3.2)$$

als Beobachtungsabbildung definiert.

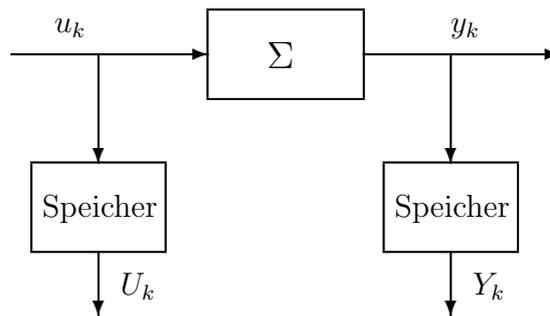


Abbildung 3.1: Messung und Speicherung der Ein-/Ausgangs-Historien *

*Für $k \neq 0$ ist $U_k = [u_{k-1}, \dots, u_{k-N}]^T$, $Y_k = [y_{k-1}, \dots, y_{k-N}]^T$ und es ergibt sich entsprechend zu Gleichung (3.2) $\mathcal{Y}(U_k, x_k) = Y_k$

U wird hier als Teil der Spezifikationen der Abbildung aufgefasst. Für jedes $U \in \mathbb{R}^N$ ergibt sich eine solche Abbildung. Man kann sich $\mathcal{Y}(U, \cdot)$ auch als Abbildung vorstellen, die mit $U \in \mathbb{R}^N$ „parametrisiert“ ist.

Mit Hilfe der Beobachtungsabbildung erhält man folgende alternative Formulierung der Beobachtbarkeit

Definition 3.1.1. (*Alternative Formulierung der Beobachtbarkeit*)

Σ heißt beobachtbar, wenn es eine natürlich Zahl N und eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für alle $U \in \mathbb{R}^N$, $x, x' \in \mathbb{R}^n$

$$|\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U, x')| \geq c|x - x'|$$

gilt. □

In den weiteren Betrachtungen wird stets davon ausgegangen, dass N im Sinne dieser Definition geeignet ist.

Dass die Beobachtungsabbildung nützlich sein kann um den Zustand x aus gemessenen Historien (U, Y) zu bestimmen, zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 3.1:

Das lineare System

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} x_k \end{aligned} \quad (3.3)$$

ist offensichtlich beobachtbar. Durch Umstellen der Gleichung (3.3) nach x_k und Umbenennung des Index $k \rightarrow k - 1$ erhält man die Darstellung rückwärts in der Zeit

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} u_{k-1} \\ y_k &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} x_k \end{aligned} .$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich nun für $N = 2$ die Beobachtungsabbildung

$$\mathcal{Y}(U, x) = \underbrace{\begin{bmatrix} -14 & 0 \\ -11 & -14 \end{bmatrix}}_{M_1} U + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{M_2} x .$$

Für gegebenes (U, Y) lässt sich dann die Gleichung $\mathcal{Y}(U, x) = Y$ nach x auflösen und man erhält

$$x = M_2^{-1}Y - M_2^{-1}M_1U$$

für den aktuellen Systemzustand. □

Wie das Beispiel zeigt, werden zur Bestimmung des aktuellen Zustand des Systems, sowohl die Ausgangs- als auch die Eingangs-Historie des Systems benötigt. Im weiteren Verlauf der Betrachtungen ist daher die Menge aller möglichen Ein-/Ausgangs-Historien

$$\mathcal{H} := \{(U, Y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid Y = \mathcal{Y}(U, x), U \in \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^n\}$$

von Bedeutung.

Ebenso wird folgende wichtige Eigenschaft der Beobachtungsabbildungen benötigt:

Satz 3.1.1. *Die Beobachtungsabbildungen $\mathcal{Y}(U, x)$ sind Lipschitz-stetig, d.h. es gibt $L_B > 0$, so dass für alle $U, U' \in \mathbb{R}^N$ und $x, x' \in \mathbb{R}^n$*

$$|\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')| \leq L_B(|U - U'| + |x - x'|) \quad (3.4)$$

gilt. □

Beweis 3.1.1. Ausgehend von $x_0 = x$ und $x'_0 = x'$ erhält man mit den Gleichungen (2.7) und (2.8)

$$|x_{-1} - x'_{-1}| \leq L(|x - x'| + |u_{-1} - u'_{-1}|) \quad .$$

Durch erneutes Anwenden der Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} |x_{-2} - x'_{-2}| &\leq L(|x_{-1} - x'_{-1}| + |u_{-2} - u'_{-2}|) \\ &\leq L^2(|x - x'| + |u_{-1} - u'_{-1}|) + L|u_{-2} - u'_{-2}| \quad . \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich für $l \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_{-l} - x'_{-l}| &\leq L^l(|x - x'| + |u_{-1} - u'_{-1}|) + L^{l-1}|u_{-2} - u'_{-2}| + \dots \\ &\quad + L^2|u_{-l+1} - u'_{-l+1}| + L|u_{-l} - u'_{-l}| \end{aligned}$$

Mit der Gleichung (2.10) ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned} |h(x_{-l}) - h(x'_{-l})| &\leq L|x_{-l} - x'_{-l}| \\ &\leq L^{l+1}(|x - x'| + |u_{-1} - u'_{-1}|) + \dots + L|u_{-l} - u'_{-l}| \quad . \end{aligned}$$

Somit erfolgt für die dazugehörigen Beobachtungsabbildungen

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')| &= \left| \begin{bmatrix} h(x_{-1}) - h(x'_{-1}) \\ \vdots \\ h(x_{-N}) - h(x'_{-N}) \end{bmatrix} \right| \\ &\leq \left[\begin{array}{c} L^2 \\ L^3 \\ \vdots \\ L^{N+1} \end{array} \right] |x - x'| + \begin{bmatrix} L^2 & 0 & \dots & 0 \\ L^3 & L^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ L^{N+1} & \dots & L^3 & L^2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} |u_{-1} - u'_{-1}| \\ |u_{-2} - u'_{-2}| \\ \vdots \\ |u_{-N} - u'_{-N}| \end{array} \right] \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun, dass $L \geq 1$ (siehe (2.8)-(2.10)) ist und wendet die Dreiecksungleichung, sowie die 1-Norm an, so ergibt sich letztlich

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')| &\leq (L^2 + \dots + L^{N+1})|x - x'| + (L^2 + \dots + L^{N+1})|U - U'| \\ &\leq NL^{N+1}(|U - U'| + |x - x'|) \quad , \end{aligned}$$

womit der Beweis mit $L_B = NL^{N+1}$ erbracht wäre. \square

3.1.2 Umkehrabbildung

Für beliebiges $(U, Y) \in \mathcal{H}$ gibt es (nach Definition von \mathcal{H} und infolge der Beobachtbarkeit) genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Y = \mathcal{Y}(U, x)$. Demzufolge ist x (eindeutige) Lösung der Gleichung

$$\mathcal{Y}(U, x) = Y \quad . \quad (3.5)$$

Der Lösungsvektor x hängt offenbar von U, Y ab. Dies schreiben wir als $x = Q(U, Y)$, wobei $Q(U, Y)$ den (funktionsmäßigen) Zusammenhang darstellt. Daher wird $Q(U, \cdot)$ als Umkehrabbildung von $\mathcal{Y}(U, \cdot)$ bezeichnet. Sie ist formal definiert durch

$$\begin{aligned} Q(U, \cdot) : \quad \mathcal{Y}(U, \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ Q(U, \mathcal{Y}(U, x)) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wie bei der Beobachtungsabbildung $\mathcal{Y}(U, \cdot)$, ist auch bei der zugehörigen Umkehrabbildung $Q(U, \cdot)$ das U Teil der Spezifikation der Abbildung. Wir können uns auch $Q(U, \cdot)$ mit $U \in \mathbb{R}^N$ „parametrisiert“ denken

Satz 3.1.2. *Wenn das System Lipschitz-stetig und nach Definition 2.3.1 beobachtbar ist, dann gilt für die Menge der Umkehrabbildungen $Q(\mathbb{R}^N, \cdot)$ für alle $(U, Y), (U', Y') \in \mathcal{H}$*

$$|Q(U, Y) - Q(U', Y')| \leq L_Q |(U - U'), (Y - Y')| \quad .$$

Beweis 3.1.2. Berücksichtigt man, dass es $x, x' \in \mathbb{R}^n$ gibt, für die

$$\begin{aligned} Q(U, Y) &= Q(U, \mathcal{Y}(U, x)) = x \\ Q(U', Y') &= Q(U', \mathcal{Y}(U', x')) = x' \end{aligned}$$

gilt und somit

$$|Q(U, \mathcal{Y}(U, x)) - Q(U', \mathcal{Y}(U', x'))| = |x - x'|$$

ist. So muss gezeigt werden, dass

$$|(U, \mathcal{Y}(U, x)) - (U', \mathcal{Y}(U', x'))| \geq \frac{1}{L_Q} |x - x'| \quad (3.7)$$

gilt. Für $U = U'$ entspricht dies gerade der Definition 2.3.1 (Beobachtbarkeit). Hierzu wird als erstes die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')| &= |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U, x') + \mathcal{Y}(U, x') - \mathcal{Y}(U', x')| \\ &\geq |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U, x')| - |\mathcal{Y}(U, x') - \mathcal{Y}(U', x')| \end{aligned}$$

für die Ausgangshistorien durchgeführt. Mit den Ungleichungen (2.11) und (3.4) und den Bezeichnungen $\Delta x = x - x'$ und $\Delta U = U - U'$ lässt sich dies nun zu

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')| &\geq c|\Delta x| - L_B|\Delta U| \\ \rightsquigarrow |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')| + L_B|\Delta U| &\geq c|\Delta x| \\ \rightsquigarrow |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')| + |\Delta U| &\geq \frac{c}{1 + L_B}|\Delta x| \end{aligned}$$

umformen. Wird weiterhin noch $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{2}(|a| + |b|)$ verwendet, so erfolgt

$$\begin{aligned} |(U, \mathcal{Y}(U, x)) - (U', \mathcal{Y}(U', x'))| &= \{|\Delta U|^2 + |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')|^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2}(|\Delta U| + |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U', x')|) \\ &\geq \frac{c}{2(1 + L_B)}|\Delta x| \quad . \end{aligned}$$

Mit $L_Q = \frac{2}{c}(1 + L_B)$ ist somit die Gleichung (3.7) hergeleitet und der Beweis für den Satz 3.1.2 erbracht. \square

Eine Umkehrung von Satz 3.1.2 wird durch folgenden Satz beschrieben.

Satz 3.1.3. *Wenn für alle $(U, Y) \in \mathcal{H}$ eine Umkehrabbildung $x = Q(U, Y)$, mit $Y = \mathcal{Y}(U, x)$, existiert und Lipschitz-stetig ist, dann ist das System beobachtbar nach Definition 3.1.1.*

Beweis 3.1.3. Wenn $Q(U, Y)$ existiert und Lipschitz-stetig ist, gilt für beliebige $(U, Y), (U', Y') \in \mathcal{H}$

$$|Q(U, Y) - Q(U', Y')| \leq L_Q|(U - U'), (Y - Y')| \quad .$$

Für die Definition 3.1.1 wird $U = U'$ vorausgesetzt und somit folgt für beliebige $(U, Y), (U, Y') \in \mathcal{H}$

$$|Q(U, Y) - Q(U, Y')| \leq L_Q|Y - Y'| \quad .$$

Da nur Historien aus \mathcal{H} betrachtet werden, gibt es $x = Q(U, Y)$ bzw. $x' = Q(U, Y')$ mit $\mathcal{Y}(U, x) = Y$ bzw. $\mathcal{Y}(U, x') = Y'$. Verwendet man diese Bezeichnungen, so erfolgt

$$|\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U, x')| \geq \frac{1}{L_Q}|x - x'| \quad .$$

Mit $c = \frac{1}{L_Q}$ entspricht dies der Definition 3.1.1. \square

3.2 Länge der Historien

In diesem Abschnitt wird als erstes gezeigt, dass es eine Mindestzahl N von Messungen gibt, die für Beobachtbarkeit eines Systems nach Definition 2.3.1 generell notwendig ist. Anschließend werden die Fälle $N = n$ und $N > n$ und die dabei auftretenden Besonderheiten bezüglich $\mathcal{Y}(\cdot, \cdot)$ und $Q(\cdot, \cdot)$ erläutert.

3.2.1 Notwendige Länge der Historien

In der Definition der Beobachtbarkeit 2.3.1 werden Historien der Länge N betrachtet und es wird die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ gefordert, mit dem sich die Ausgangshistorie für zwei verschiedene Zustände gemäß Gleichung (2.11) unterscheiden. Somit stellt sich als erstes die Frage, ob es eine untere Grenze für N gibt. Folgend wird gezeigt, dass für alle Lipschitzstetigen Systeme mindestens $N = n$ Messungen (n ist die Systemordnung) notwendig sind.

Dazu wird zunächst das nachstehende allgemeine Ergebnis gezeigt:

Lemma 3.2.1. *Sei $n > N$ und die Abbildung*

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ A(x) &= y \end{aligned}$$

Lipschitz-stetig. Dann gibt es kein $c > 0$, so dass für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$

$$c|x - x'| \leq |A(x) - A(x')|$$

gilt.

Beweis 3.2.1. Es genügt, das Lemma für den Fall $A(0) = 0$ zu beweisen. Der Fall $A(0) \neq 0$ folgt dann durch Anwendung des Bewiesenen auf die Abbildung $A(x) - A(0)$.

Sei also $A(0) = 0$. Aus dem \mathbb{R}^n betrachten wir die Teilmenge

$$G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}^\dagger .$$

Da A Lipschitz-stetig ist, L bezeichne die Lipschitzkonstante, gilt dann

$$|A(x)| \leq L \quad \forall x \in G,$$

d.h. $A(x) \in H$, wobei H definiert ist als

$$H := \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y| \leq L\}.$$

[†] $|\cdot|$ bezeichnet die Maximum-Norm, hier und im gesamten Beweis.

Für beliebige $r \in \mathbb{N}$ definieren wir eine endliche Teilmenge $G_r \subset G$ wie folgt:

$$G_r := G \cap \left\{ \frac{1}{r} \mathbb{Z}^n \right\} \quad .$$

Somit haben je zwei (verschiedene) Elemente $x, x' \in G_r$ mindestens den Abstand $\frac{1}{r}$ und die Anzahl der Elemente in G_r ist $(2r + 1)^n$.

Für beliebiges $s \in \mathbb{N}$ zerlegen wir H in Hyperwürfel, die durch die Eckpunkte

$$H_s := H \cap \left\{ \frac{L}{s} \mathbb{Z}^N \right\}$$

markiert sind.*

Der Abstand zweier beliebiger Elemente in einem solchen Hyperwürfel beträgt höchstens $\frac{L}{s}$ und die Anzahl dieser Hyperwürfel in H ist $(2s)^N$.

Man wähle nun r, s so, dass die Anzahl der Elemente in G_r um mindestens eins größer ist als die Anzahl der Hyperwürfel in H , also

$$(2r + 1)^n \geq (2s)^N + 1 \quad .$$

Dies ist z.B. für die Wahl

$$r = (2s)^{\frac{N}{n}} \quad s \in \left\{ \frac{1}{2} (2i)^n \right\}_{i=1}^{\infty}$$

erfüllt. In mindestens einem der Hyperwürfel von H liegen dann zwei Bildpunkte von $A(G_r)$. Mit anderen Worten, es gibt $x \neq x' \in G_r$ so dass

$$|x - x'| \geq \frac{1}{r} \quad (3.8)$$

$$|A(x) - A(x')| \leq \frac{L}{s} \quad (3.9)$$

Division der Gleichung (3.9) durch $|x - x'|$ und Abschätzen mit (3.8) liefert

$$\frac{|A(x) - A(x')|}{|x - x'|} \leq \frac{\frac{L}{s}}{\frac{1}{r}} \leq L \frac{r}{s} \quad .$$

Mit der vorhergehenden Wahl von r folgt

$$|A(x) - A(x')| \leq L 2^{\frac{N}{n}} s^{\frac{N}{n}-1} |x - x'| \quad .$$

Lässt man nun $s \rightarrow \infty$ gehen, so folgt $s^{\frac{N}{n}-1} \rightarrow 0$ und damit das Lemma. \square

*Ein Hyperwürfel ist die Menge aller Punkte in einem Intervallvektor der Form $\frac{L}{s} \begin{bmatrix} [i_1, i_1 + 1] \\ [i_2, i_2 + 1] \\ \vdots \\ [i_N, i_N + 1] \end{bmatrix}$ mit $i_1, \dots, i_m \in -s, \dots, s - 1$

Da $\mathcal{Y}(U, \cdot)$ nach Satz 3.1.1 Lipschitz-stetig ist, kann man die Behauptung auf $\mathcal{Y}(U, \cdot)$ (anstelle von A) anwenden. Vergleicht man das Ergebnis (es gibt keine Konstante) mit der Definition 2.3.1 (es gibt eine Konstante), so ist zu folgern, dass für die Beobachtbarkeit eines Systems Historien der Länge $N < n$ grundsätzlich nicht ausreichend sind. Die Historien müssen also mindestens die Länge $N = n$ haben.

3.2.2 Beobachtung mit Historien der Länge $N = n$

Bei beobachtbaren linearen Systemen sind $N = n$ Messungen immer ausreichend um die Bedingung 2.11 zu erfüllen. Dies wird zunächst am folgenden, allgemeinen, linearen Beispiel der Ordnung 2 gezeigt.

Beispiel 3.2:

Ein lineares System sei, rückwärts in der Zeit, durch die Differenzengleichung

$$\begin{aligned}x_{k-1} &= Ax_k + bu_{k-1} \\ y_k &= cx_k\end{aligned}$$

mit $A = e^{-FT}$ gegeben. Die Beobachtungsabbildung des Systems ergibt sich dann durch Iteration des Systems zu

$$\mathcal{Y}(U_k, x_k) = \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_{k-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cb & 0 \\ cAb & cb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} cA \\ cA^2 \end{bmatrix}}_{M_2} x_k \quad .$$

Werden die gemessenen Historien $(U, Y)_k$ eingesetzt, so lässt sich die Gleichung umstellen,

$$x_k = \begin{bmatrix} cA \\ cA^2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ - \begin{bmatrix} cb & 0 \\ cAb & cb \end{bmatrix} U_k + Y_k \right\} \quad (3.10)$$

um den Systemzustand x_k bestimmen zu können. \square

Hierbei entspricht die Matrix M_2 dem Produkt von der Beobachtbarkeitsmatrix $Q_{cA} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix}$ und der Systemmatrix A . Ist das System beobachtbar, so hat Q_{cA} den Rang n . Da $A = e^{-FT}$ ebenfalls den Rang n hat, ist M_2 nicht singulär und somit wird durch die Gleichung (3.10) jedem Historienpaar $(U, Y)_k \in \mathcal{H}$ genau ein Zustand $x_k \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. (Aber zu jedem Zustand x_k gibt es unendlich viele Historienpaare $(U, Y)_k$.)

Für alle $U \in \mathbb{R}^n$ ist folglich $\mathcal{Y}(U, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, d.h. die Menge aller Historien füllt den gesamten $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ aus. Da M_2 regulär ist, lässt sich die Umkehrabbildung (3.10) einfach durch Invertieren finden.

Im Anhang B.3 wird gezeigt, wie sich die Umkehrabbildung für lineare Systeme aus einem Dead-Beat-Luenberger Beobachter bestimmen lässt.

Das folgende Beispiel für ein nichtlineares System ist bewusst einfach gehalten, damit alle Aspekte, die es demonstrieren soll, sich rechentechnisch noch überschaubar bewältigen lassen.

Beispiel 3.3:

Die Differenzengleichung des Systems vorwärts in der Zeit lautet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} x_k^{(1)} + \varphi(x_k^{(2)}) \\ x_k^{(2)} + u_k \end{bmatrix} \\ y_k &= x_k^{(1)} \end{aligned} .$$

Darin sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton steigend und sowohl φ , als auch seine Inverse φ^{-1} seien Lipschitz. Beispiele für solche Funktionen sind $2r + \sin(r)$, $r + (r^3/(1+r^2))$, $r(2 + \sin(\ln(1+|r|))) \dots$

Auflösen der Differenzengleichung nach x_k ergibt die Systemdarstellung rückwärts in der Zeit

$$\begin{aligned} x_k^{(1)} &= x_{k+1}^{(1)} - \varphi(x_{k+1}^{(2)} - u_k) \\ x_k^{(2)} &= x_{k+1}^{(2)} - u_k \\ y_k &= x_k^{(1)} \end{aligned} .$$

Nach zweimaliger Iteration erhält man (ausgehend vom Zustand x_k) für den Ausgang

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= x_k^{(1)} - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1}) \\ y_{k-2} &= x_k^{(1)} - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1}) - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1} - u_{k-2}) \end{aligned}$$

und für die Beobachtungsabbildung mit Historien der Länge $N = n = 2$ folgt

$$\mathcal{Y}(U_k, x_k) = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1}) \\ x_k^{(1)} - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1}) - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1} - u_{k-2}) \end{bmatrix} .$$

Dass das System aus Historien der Länge 2 beobachtbar ist (d.h. es gilt $|\mathcal{Y}(U_k, x_k) - \mathcal{Y}(U_k, x'_k)| \geq c|x_k - x'_k|$) lässt sich hieraus direkt nachweisen

oder durch Feststellung der Existenz und der Lipschitz-Stetigkeit der Umkehrabbildung (s. Satz 3.1.3). Wir wählen hier den 2. Weg. Dazu lösen wir für beliebiges $Y_k = [y_{k-1}, y_{k-2}]^T \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= x_k^{(1)} - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1}) \\ y_{k-2} &= x_k^{(1)} - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1}) - \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1} - u_{k-2}) \quad . \end{aligned}$$

Aus der ersten minus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$x_k^{(2)} = \varphi^{-1}(y_{k-1} - y_{k-2}) + u_{k-1} + u_{k-2}$$

und aus der ersten Gleichung

$$x_k^{(1)} = y_{k-1} + \varphi(x_k^{(2)} - u_{k-1}) \quad .$$

Die Umkehrabbildung existiert offensichtlich und lautet

$$Q(U_k, Y_k) = \begin{bmatrix} y_{k-1} + \varphi(\varphi^{k-1}(y_{k-1} - y_{k-2}) + u_{k-2}) \\ \varphi^{-1}(y_{k-1} - y_{k-2}) + u_{k-1} + u_{k-2} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.11)$$

Die Umkehrabbildung ist offensichtlich Lipschitz.

Da beliebiges $Y_k \in \mathbb{R}^2$ betrachtet wurde, ist somit auch gezeigt, dass $\mathcal{Y}(U_k, \mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ ist, für alle $U_k \in \mathbb{R}^2$. \square

Für beobachtbare Lipschitz-stetige Systeme ist z. B. die Frage, ob $\mathcal{Y}(U, \mathbb{R}^n)$ stets den \mathbb{R}^n ausfüllt, offen geblieben. Weder ein Beweis dafür, noch ein Gegenbeispiel ließen sich dazu im Verlaufe dieser Arbeit finden.

Es lässt sich aber zeigen, dass diese Abbildung für hinreichend oft differenzierbare Systeme stets den gesamten Raum ausfüllt. Da in dieser Arbeit aber nur die schwächere Voraussetzung der Lipschitz-Stetigkeit gemacht wird, wird auf diesen Aspekt nicht weiter eingegangen. Sollte es bei einem beobachtbaren System vorkommen, dass $\mathcal{Y}(U, \mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^n$ ist, so müsste dies genauso behandelt werden, wie die Systeme im nächsten Abschnitt. Denn dort füllt die Beobachtungsabbildung nicht den gesamten Raum aus, was eine Erweiterung der Umkehrabbildung erforderlich macht.

3.2.3 Beobachtung mit Historien der Länge $N > n$

In diesem Abschnitt wird der Fall betrachtet, dass $N > n$ Messungen zur Beobachtung verwendet werden. Dies ist für einige Systeme zwingend erforderlich, da sie nicht über $N = n$ Messungen beobachtbar sind.

Lemma 3.2.2. *Sei Σ in N -Schritten beobachtbar und sei $\mathcal{Y}(U, \cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^N$ die zugehörige Beobachtungsabbildung. Wenn $N > n$ ist, dann gilt für jedes $U \in \mathbb{R}^N$*

$$\mathcal{Y}(U, \mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^N \quad .$$

Beweis 3.2.2. Wie in Satz 3.1.1 gezeigt wurde, ist $\mathcal{Y}(U, \cdot)$ Lipschitz-stetig, d.h. es gibt $c_1 > 0$, so dass

$$c_1|x - x'| \geq |\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U, x')| \quad .$$

Für die Umkehrabbildung $Q(U, \cdot)$ folgt daraus mit den Kurzbezeichnungen $y := \mathcal{Y}(U, x)$ und $y' := \mathcal{Y}(U, x')$

$$c_1|Q(U, y) - Q(U, y')| \geq |y - y'| \quad . \quad (3.12)$$

Nach Satz 3.1.2 ist die Umkehrabbildung $Q(U, \cdot)$ ebenfalls Lipschitz-stetig.

Die Annahme $\mathcal{Y}(U, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^N$ liefert daher eine Umkehrabbildung $Q : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^n$, die Lipschitz-stetig ist und die Ungleichung 3.12 erfüllt, im Widerspruch zu Lemma 3.2.1. \square

Die Aussage von Lemma 3.2.2 ist, dass die Beobachtungsabbildung $\mathcal{Y}(U, \cdot)$ nicht den gesamten \mathbb{R}^N ausfüllt. Folglich stellt die Menge aller Historien \mathcal{H} nur eine Teilmenge des $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ dar. Die komplementäre Menge $\tilde{\mathcal{H}} := \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{H}$ beinhaltet alle Elemente, die keine mögliche Historie des Systems darstellen. Sie ist nicht leer. Solche Elemente können später in der Einschwingphase des Beobachters, bei Störungen am System oder bei gestörten Messungen auftreten. Die Umkehrabbildung $Q(U, \cdot)$ ist für solche Elemente nicht definiert. Wie damit umgegangen werden kann, wird in Abschnitt 3.3.2 näher erläutert.

Definition 3.2.1. *Ein System wird „minimal beobachtbar mit N^* Messungen“ genannt, wenn das System beobachtbar ist und N^* die kleinste natürliche Zahl ist, die für N in der Definition 2.3.1 möglich ist.*

Minimal beobachtbar bedeutet, dass N^* Messungen notwendig sind, damit die Historien sich ausreichend unterscheiden. Es kann aber auch jede Zahl $N \geq N^*$ von Messungen verwendet werden.

In dem folgenden Beispiel ist $n = 1$, aber um die Beobachtbarkeit entsprechend der Definition 2.3.1 zu gewährleisten, sind $N = 2$ Messungen des Ausgangs notwendig.

Beispiel 3.4:

Das homogene System

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= \begin{cases} x_k & x_k \geq 0 \\ \frac{1}{2}x_k & x_k < 0 \end{cases} \\ y_k &= |x_k| \end{aligned}$$

hat eine Dynamik, die abhängig vom Vorzeichen des Zustandswertes ist. Da der Ausgang gleich dem Betrag ist, können 2 Zustände mit gleichem Betrag, aber verschiedenem Vorzeichen, nicht anhand einer Messung unterschieden werden. Aufgrund der unterschiedlichen Dynamiken sind dann aber die anderen Ausgangswerte bei Historien mit $N = 2$ voneinander verschieden.

Im Anhang B.1 wird gezeigt, dass für alle $x_k, x'_k \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{Y}(x_k), \mathcal{Y}(x'_k) \in \mathbb{R}^2$ die Ungleichung

$$|\mathcal{Y}(x_k) - \mathcal{Y}(x'_k)| \geq \frac{1}{4}|x_k - x'_k|$$

erfüllt ist. □

An diesem Beispiel ist auch zu sehen, dass nicht alle Werte des \mathbb{R}^2 mögliche Historien des Systems sind. Denn bei diesem System sind nur solche Historien mit $y_{k-1} = y_k$ oder $y_{k-1} = \frac{1}{2}y_k$ möglich.

Das folgende Beispiel steht für Systeme, die mit $N^* > n$ Messungen beobachtbar sind, die aber auch Zustandsbereiche \mathbb{G} haben, so dass für $\mathcal{Y}(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^N$ mit $N < N^*$

$$|\mathcal{Y}(U, x) - \mathcal{Y}(U, x')| \geq |x - x'| \quad \forall x \in \mathbb{G}, x' \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Da aber immer N^* Messungen gemacht werden müssen, um sicherzustellen, dass alle Zustände unterschieden werden können, liegen für $x \in \mathbb{G}$ redundante Informationen vor.

Dies ändert nichts daran, dass die Umkehrabbildung eindeutig bestimmt ist. Aber zu ihrer formelmäßigen Darstellung gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, z.B. dadurch dass verschiedene Kombinationen der vorhandenen Messungen verwendet werden.

Beispiel 3.5:

Betrachtet werde das folgende nichtlineare System erster Ordnung

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= 0.5x_k + 1.5 \\ (\Leftrightarrow x_{k+1} &= 2x_k - 3) \\ y_k &= \begin{cases} 0 & |x_k| < 1 \\ x_k - 1 & x_k \geq 1 \\ x_k + 1 & x_k \leq -1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich nicht mit einer Messung beobachtbar, denn für alle $|x_{k-1}| < 1$ ist $y_{k-1} = 0$ und somit sind die nachfolgenden x_k nicht

anhand einer zurückliegenden Messung zu unterscheiden. Es ist allerdings auch zu ersehen, dass sich alle Zustände mit $|x_{k-1}| > 1$ anhand einer Messung unterscheiden lassen.

Verwendet man eine Ausgangshistorie mit $N = 2$ Messungen, so ergibt sich eine Beobachtungsabbildung[†] $\mathcal{Y}(x_k) = [y_{k-1}, y_{k-2}]^T$, deren Bildbereich in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Im Anhang B.2 ist nachzulesen, wie sich diese berechnen lässt.

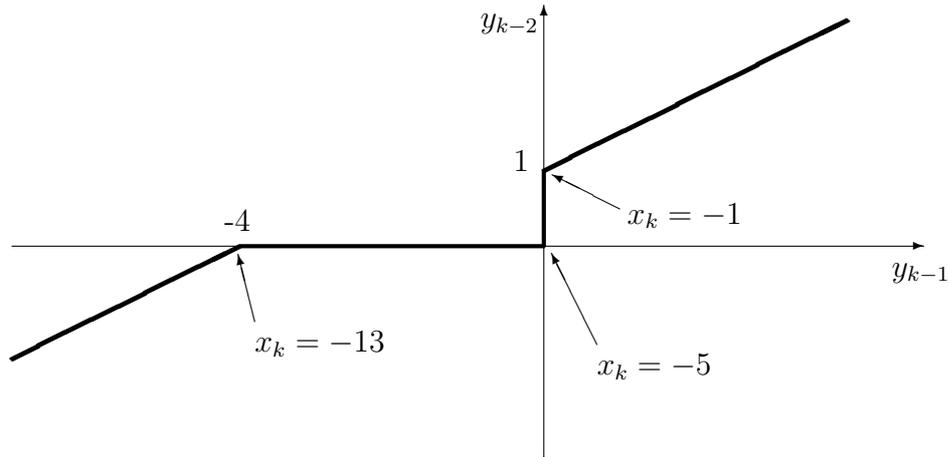


Abbildung 3.2: $\mathcal{H} = \mathcal{Y}(\mathbb{R}) \in \mathbb{R}^2$

Nach detailreicher Auswertung mit zahlreichen Fallunterscheidungen (auf deren Angabe hier verzichtet wird) ergibt sich

$$|\mathcal{Y}(x_k) - \mathcal{Y}(x'_k)| \geq 0.08|x_k - x'_k| \quad \forall x_k, x'_k \quad . \quad (3.13)$$

Somit ist das System nach Definition 2.3.1 beobachtbar.

Die Umkehrabbildung ist durch die Gleichung

$$Q : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R} \\ x_k = -3 + 2 \begin{cases} y_{k-1} - 1 & y_{k-1} < -4, y_{k-2} = 0.5y_{k-1} + 2 \\ y_{k-1} - 1 & -4 \leq y_{k-1} < 0, y_{k-2} = 0 \\ 2(y_{k-2} - 0.5) & y_{k-1} = 0, 0 \leq y_{k-2} < 1 \\ 2(y_{k-2} - 0.5) & y_{k-1} > 0, y_{k-2} = 0.5y_{k-1} + 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

definiert.

Die explizite Betrachtung der Grenzen auf der rechten Seite ergibt sich,

[†]Für autonome Systeme werden die Bezeichnungen $\mathcal{Y}(x)$ bzw. $Q(Y)$ verwendet.

da die Umkehrabbildung nur in \mathcal{H} , d.h. für mögliche Historien des Systems, definiert ist. In diesem Beispiel liegen redundante Informationen vor, da in der ersten und letzten Zeile von (3.14) sowohl y_{k-1} als auch y_{k-2} ungleich 0 sind und somit zur Berechnung von x_k verwendet werden könnten.

Im Abschnitt 3.3.2 wird dieses Beispiel fortgesetzt und gezeigt, wie im Einschwingvorgang des Beobachters der Schätzwert \hat{x}_k gebildet werden kann. \square

Solche redundanten Informationen treten stets auf, wenn $N > N^*$ Messungen verwendet werden.

3.3 Vom Beobachtungsprinzip zum Beobachter

Ein Beobachter ist ein System, welches aus den messbaren Signalen des zu beobachtenden Systems, dessen interne Zustände rekonstruiert. Er ist dadurch ausgezeichnet, dass er die beiden Eigenschaften Konvergenz und Konsistenz (siehe z.B. [18]) besitzt, auf diese wird am Ende dieses Kapitels eingegangen.

Folgend wird dargestellt, wie der Beobachter konzipiert werden kann. Hierzu wird als erstes eine Möglichkeit für die Speicherung der Ein- und Ausgangssignale angesprochen. Anschließend wird gezeigt, dass die Umkehrabbildung der Beobachtungsabbildung erweitert werden muss, falls $N > n$ ist.

3.3.1 Der Beobachter

Wie in Abschnitt 3.1 gezeigt wurde, kann man den Zustand des Systems aus den E/A Historien und der Beobachtungs-Umkehrabbildung berechnen. Dazu müssen die Historien gespeichert werden (vgl. Abbildung 3.1). Dies lässt sich durch lineare Filter (sogenannte Dead-Beat-Filter oder Schieberegister) realisieren. Mit

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sind diese definiert als

$$\hat{U}_k = F\hat{U}_{k-1} + gu_{k-1} \quad (3.15)$$

$$\hat{Y}_k = F\hat{Y}_{k-1} + gy_{k-1} \quad (3.16)$$

Die Zustände \hat{U}_k und \hat{Y}_k sind Schätzwerte für die Eingangshistorie U_k und die Ausgangshistorie Y_k . Ersetzt man in der Umkehrabbildung (3.6) die Argumente (U_k, Y_k) durch (\hat{U}_k, \hat{Y}_k) so erhält man den Zustandsschätzwert

$$\hat{x}_k = \tilde{Q}(\hat{U}_k, \hat{Y}_k) \quad . \quad (3.17)$$

Dabei ist \tilde{Q} eine (um den Definitionsbereich $\bar{\mathcal{H}}$ erweiterte) Realisierung von Q , die im nachfolgenden Abschnitt genauer behandelt wird.

Die Gleichungen 3.15, 3.16 und 3.17 stellen den vollständigen Beobachter dar, für diesen wird folgend die gekürzte Darstellung

$$\begin{aligned} \Omega : \quad (\hat{U}, \hat{Y})_{k+1} &= F(\hat{U}, \hat{Y})_k + g(u_k, y_k) \\ \hat{x}_k &= \tilde{Q}(\hat{U}_k, \hat{Y}_k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

verwendet. Er ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Dass es sich hierbei tatsächlich um einen Beobachter im herkömmlichen Sinne handelt, wird in Abschnitt 3.3.3 durch den Nachweis seiner Konsistenz und Konvergenz gezeigt.

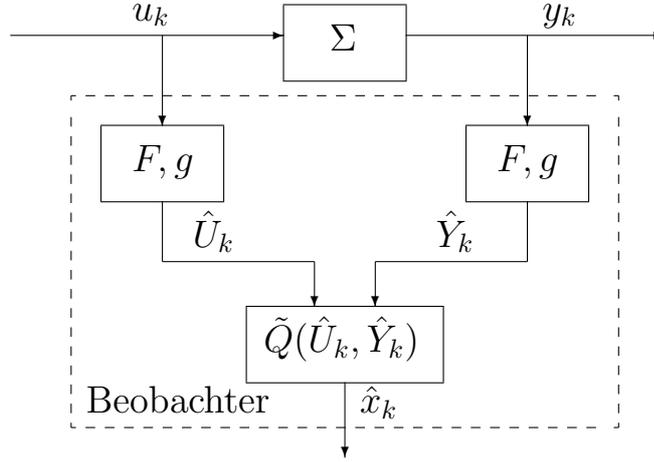


Abbildung 3.3: Beobachterdarstellung

3.3.2 Erweiterte Umkehrabbildung \tilde{Q}

Durch die Anfangszustände der Filter können innerhalb der ersten N Messzyklen Beobachterzustände $(\hat{U}, \hat{Y}) \in \bar{\mathcal{H}}$ auftreten. Um auch solchen Werten eindeutig einen Zustandsschätzwert zuordnen zu können, definieren wir die erweiterte Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \tilde{Q} : \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \tilde{Q}(\hat{U}, \hat{Y}) &= \hat{x} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{Q}(\hat{U}, \hat{Y}) := \begin{cases} Q(\hat{U}, \hat{Y}) & (\hat{U}, \hat{Y}) \in \mathcal{H} \\ \text{bel.} & (\hat{U}, \hat{Y}) \in \bar{\mathcal{H}} \end{cases} .$$

Dabei kann die Definition von $\tilde{Q}(\hat{U}, \hat{Y})$ für $(\hat{U}, \hat{Y}) \in \bar{\mathcal{H}}$ im Prinzip beliebig vorgenommen werden. Eine Möglichkeit ist z.B. eine Abbildung von \hat{Y} auf ein $Y^* \in \mathcal{Y}(\hat{U}, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} P(\hat{U}, \cdot) : \quad \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathcal{Y}(\hat{U}, \mathbb{R}^n) \\ P(\hat{U}, \hat{Y}) &= Y^* \end{aligned}$$

mit nachfolgender Anwendung von $Q(\cdot, \cdot)$. Dies liefert

$$\hat{x} = \tilde{Q}(\hat{U}, \hat{Y}) = Q(\hat{U}, P(\hat{U}, \hat{Y})) \quad .$$

Dieses Vorgehen wird im folgenden Beispiel angewandt.

Beispiel 3.6:

Hier wird die Realisierung des Beobachters für das homogene Beispiel 3.5 betrachtet. Durch verwenden eines Dead-Beat-Filters der Dimension 2, können beim Einschwingvorgang Zustände $\hat{Y}_k \in \bar{\mathcal{H}}$ auftreten. Die notwendige Erweiterung von der Umkehrabbildung wird nun mit der Projektion

$$P : \quad \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \mathcal{H}$$

$$P(\hat{Y}_k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{Y}_k^{(1)} \\ * \end{bmatrix} & \hat{Y}_k^{(1)} < 0 \\ \begin{bmatrix} * \\ \hat{Y}_k^{(2)} \end{bmatrix} & \hat{Y}_k^{(1)} \geq 0 \end{cases} ,$$

erreicht. Dies ist für $\hat{Y}_k^{(1)} < 0$ eine senkrechte Projektion und sonst eine waagerechte Projektion aller Zustände auf \mathcal{H} . Das * steht dabei für einen Wert, der nicht berechnet werden muss, da er in der erweiterten Umkehrabbildung

$$\tilde{Q} : \quad \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{x}_k = Q(P(\hat{Y}_k)) = \begin{cases} 2\hat{Y}_k^{(1)} - 5 & \hat{Y}_k^{(1)} < 0 \\ 4\hat{Y}_k^{(2)} - 5 & \hat{Y}_k^{(1)} \geq 0 \text{ und } \hat{Y}_k^{(2)} \geq 0 \\ 4\hat{Y}_k^{(2)} - 13 & \hat{Y}_k^{(1)} \geq 0 \text{ und } \hat{Y}_k^{(2)} < 0 \end{cases}$$

nicht benötigt wird.

Wohlgemerkt ist dies nur eine mögliche Projektion die verwendet werden kann, möglich wäre auch eine Projektion der Art

$$P(\hat{Y}_k) = \hat{Y}_k + [1 \quad -1]^T \alpha(\hat{Y}_k) \quad .$$

Dabei ist $\alpha(\hat{Y}_k)$ ein Maß für den Abstand des Punktes \hat{Y}_k entlang der Projektionsrichtung $[1, -1]^T$ von \mathcal{H} . Die Erweiterung mit dieser Projektion wäre in diesem Beispiel Lipschitz-stetig. Dies hätte den Vorteil, dass kleine Änderungen in \hat{Y}_k auch zu kleinen Änderungen in \hat{x}_k führen würden. Aber die Berechnung von $\hat{x}_k = Q(P(\hat{Y}_k))$ wäre nicht so einfach, da für jeden Geradenabschnitt in der Abbildung 3.2 der Bereich, der auf ihn projiziert würde, berechnet werden müsste. \square

Wie im Beispiel schon angedeutet, können bei einer Projektion Sprünge auftreten. Dies hat zur Folge, dass \tilde{Q} nicht Lipschitz-stetig ist.

Im Anhang A.2 wird ein Ansatz vorgestellt, mit dem eine Lipschitz-stetige erweiterte Umkehrabbildung Q_{LF} berechnet werden kann. Diese Lipschitz-stetige Fortsetzung Q_{LF} von Q benötigt lediglich die zuvor gezeigte Lipschitzstetigkeit von Q .

3.3.3 Konsistenz und Konvergenz des Beobachters

Zwei Eigenschaften die ein Beobachter haben muss, sind Konsistenz und Konvergenz. Folgend wird gezeigt, dass der Beobachter nach Gleichung (3.18) diese Eigenschaften besitzt.

Satz 3.3.1. *Der Beobachter Ω ist konsistent zu dem System Σ , d.h. zu jedem Anfangswert x_{k_0} des Systems und jeder Steuerfolge $\{u_k\}$ gibt es jeweils Anfangszustände $(\hat{U}, \hat{Y})_{k_0} \in \mathcal{H}$ des Beobachters, so dass $\hat{x}_k = x_k \forall k \geq k_0$ gilt.*

Beweis 3.3.1. Die Gleichungen 2.6 und 2.7 sind beide für das System Σ anwendbar. Somit kann für beliebiges x_{k_0} und eine Eingangshistorie U_{k_0} das System rückwärts iteriert werden. Hierdurch erhält man dann die Historien $\mathcal{Y}(U_{k_0}, x_{k_0})$ und U_{k_0} , welche nun als Startwert $\hat{U}_{k_0} = U_{k_0}$ und $\hat{Y}_{k_0} = \mathcal{Y}(U_{k_0}, x_{k_0})$ des Beobachters verwendet werden.

Auf Grund der Beobachtbarkeit folgt aus diesen Startwerten für den Beobachterschätzwert $\hat{x}_{k_0} = x_{k_0}$. Hierbei wird nicht die erweiterte Umkehrabbildung $\tilde{Q}(\cdot, \cdot)$ benötigt, da die Startwerte eine echte Systemhistorie darstellen und $Q(\cdot, \cdot)$ für diese definiert ist.

Der Beobachter wird nun einmal iteriert, indem $y_{k_0} = h(x_{k_0})$ verwendet wird. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung sind die Historien im Beobachter nun auch zu

x_{k_0+1} konsistent, d.h. $x_{k_0+1} = Q(\hat{U}_{k_0+1}, \hat{Y}_{k_0+1})$. Per Induktion folgt auf die gleiche Weise $\hat{x}_k = x_k$ für alle $k \geq k_0$. \square

Satz 3.3.2. *Der Beobachter Ω ist konvergent zu dem System Σ , d.h. für beliebige $x_{k_0} \in \mathbb{R}^n$ und $(\hat{U}, \hat{Y})_{k_0} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ und jede Steuerfolge $\{u_k\}$ gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{x}_k - x_k| = 0 \quad .$$

Beweis 3.3.2. Dem Beobachter liegen nach N -Messungen die richtigen Ein- und Ausgangshistorien vor. Aus den richtigen Historien bestimmt der Beobachter stets den exakten Wert $\hat{x}_k = x_k$. Somit ist $|\hat{x}_k - x_k| = 0$ für alle $k \geq k_0 + N$. \square

Kapitel 4

E/A-Modellierung

In diesem Kapitel wird, auf der Grundlage des im Kapitel 3 hergeleiteten Beobachters, ein Ein/Ausgangs-Modell für das System Σ angegeben. Ein E/A-Modell verwendet nur zurückliegende Werte der Eingangs- und Ausgangsgrößen als (interne) Zustände.

Solche Modelle sind u. a. dann von Interesse, wenn man das Systemverhalten experimentell aus gemessenen Ein/Ausgangsverläufen (numerisch) nachbilden will. Um das tun zu können, wäre zunächst zu klären ob bzw. wann dies grundsätzlich möglich ist und wie eine geeignete Modellstruktur aussieht. Dazu liefert dieses Kapitel Antworten. Überdies sind E/A-Modelle für Regelung mittels Beobachter insofern begünstigt, weil für sie der Beobachter-Entwurf besonders einfach ist.

4.1 Vom Zustands-Beobachter zum E/A-Modell

Ausgangspunkt ist die Idee:

Jeder (konsistente) Beobachter kann als Modell verwendet werden.

Dies lässt sich folgendermaßen zeigen.

Die Abbildung 4.1 zeigt einen Beobachter Ω , dessen Zustand mit z_k bezeichnet wird, der aus den Messwerten von u_k und y_k des Systems Σ einen Schätzwert \hat{x}_k für den Systemzustand bestimmt.

Bei einem (konsistenten) Beobachter gibt es zu jedem Anfangszustand x_0 des Systems einen Anfangszustand z_0 des Beobachters, so dass $\hat{x}_k = x_k \quad \forall k \geq 0$ gilt und folglich auch $\hat{y}_k = y_k$.

Bei Beobachtern, wie z. B. der Luenberger Beobachter [12], die ein Modell des Systems verwenden, ist sofort klar, dass es solche Anfangswerte gibt und auch, dass es für alle Anfangswerte des Beobachters entsprechende Systemstartwerte gibt (diese müssen lediglich identisch sein).

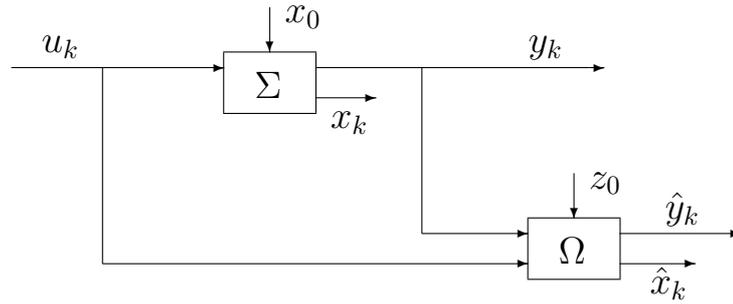


Abbildung 4.1: Allgemeine Darstellung eines Beobachters

Wenn in Ω nun ein konsistenter Anfangszustand z_0 vorliegt, der zu $\hat{x}_0 = x_0$ führt, dann kann (wegen $\hat{y}_k \equiv y_k$) anstelle von y_k auch \hat{y}_k auf den Eingang des Beobachters gelegt werden, ohne dass sich die Trajektorie des Beobachters verändert. Dies ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Somit erhält man letztlich ein Modell, welches dieselben E/A-Verläufe generiert, wie Σ .

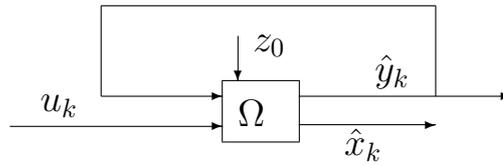


Abbildung 4.2: Beobachter verwendet als Modell des Systems

Der in Kapitel 3 hergeleitete Beobachter ist konsistent. Er lässt sich daher auf die beschriebene Weise zur Bildung eines Modells verwenden. Zur Unterscheidung werden die Zustände des Modells nun mit U_k^M und Y_k^M und der Ausgang mit y_k^M bezeichnet, folglich ergibt sich

$$M : \quad \begin{aligned} (U, Y)_{k+1}^M &= F(U, Y)_k^M + g(u_k, y_k^M) \\ y_k^M &= h(\tilde{Q}(U_k^M, Y_k^M)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

als Gleichung für das Modell. Abbildung 4.3 stellt das Modell als Blockschaltbild dar. Aus der Gleichung (4.1) und der Definition für F, g ist ersichtlich, dass die Zustände $(U, Y)_k^M$ des Modells nur zurückliegende Werte von u_k und y_k^M enthalten. Es handelt sich bei diesem Modell also um ein echtes E/A-Modell.

Ein Historienabschnitt (U, Y) des Systems Σ ist Element eines linearen Vektorraums $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Wie in Kapitel 3 gezeigt, kann die Menge \mathcal{H} aller möglichen Historien den $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ voll oder auch nur zum Teil ausfüllen. Man spricht deshalb

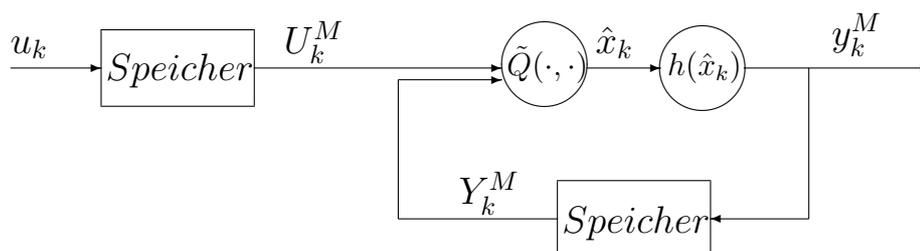


Abbildung 4.3: E/A-Modell des Systems

von einer Einbettung von \mathcal{H} in den $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ($\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$). Da das Modell, mit entsprechenden konsistenten Anfangsbedingungen $(U, Y)_{k_0}^M \in \mathcal{H}$, jede Historie aus \mathcal{H} eigenständig generiert, sagt man auch:

Σ ist Teil von M , bzw. Σ ist eingebettet in M .

Eingebettet deshalb weil M u. U. auch andere Lösungen (Historien die nicht in \mathcal{H} enthalten sind) haben kann. Diese entstehen bei systeminkonsistenten Anfangsbedingungen $(U, Y)_{k_0}^M \in \bar{\mathcal{H}}$.

Lemma 4.1.1. *Sei Σ eingebettet in M und zu einem beliebigen Anfangszustand $x_{k_0} \in \mathbb{R}^n$ von Σ sei $(U, Y)_{k_0}^M \in \mathcal{H}$ ein zugehöriger Anfangszustand von M , so dass sich bei beliebigem und für Σ und M gleichem Eingangssignal $\{u_k\}_{k=k_0}^\infty$*

$$y_k = y_k^M \quad k \geq k_0$$

ergibt. Dann gilt für die Zustände von Σ und M

$$x_k = Q(U_k^M, Y_k^M) \quad k \geq k_0.$$

Beweis 4.1.1. Der Beweis erfolgt analog zu dem Beweis der Konsistenz des Beobachters (Satz 3.3.1), also mittels Konstruktion von $(U, Y)_{k_0}^M$ und Iteration des Modells. Daher sei hier auf Beweis 3.3.1 verwiesen. \square

Die Einbettung von Σ in M bedeutet i. a. nicht, dass umgekehrt auch M in Σ eingebettet ist. Es gibt Anfangszustände $(U, Y)_{k_0}^M \in \bar{\mathcal{H}}$ des Modells, zu denen es keinen Anfangszustand x_{k_0} des Systems mit $y_k^M \equiv y_k$ gibt. Das Modell kann in diesem Fall „mehr“ E/A-Verläufe generieren als das System.

Beispiel 4.1:

Ein einfaches Beispiel liegt in der Abbildung 4.4 vor, wenn Σ' Teil von M ist und $y'_k \equiv 0$ eine der Lösungen von Σ' ist. Im linearen Fall kann man sich Σ' als nicht steuerbares Teilsystem von M vorstellen. \square

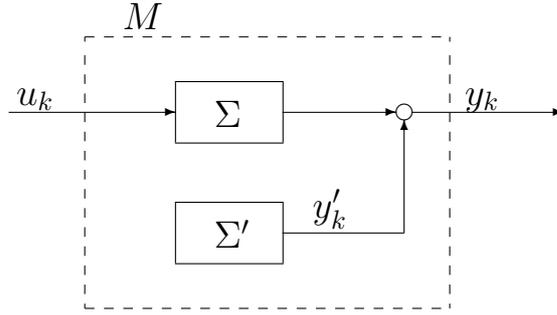


Abbildung 4.4: Einbettung

Wie beim Beobachter können für das Modell nun die Fälle unterschieden werden, wieviele Messwerte (Speicherwerte) N verwendet werden.

Bei beobachtbaren, linearen Systemen sind $N = n$ Messungen immer ausreichend, um das System beobachten zu können. Folglich werden Speicher der Ordnung n für das Modell benötigt und es gilt $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ und $\bar{\mathcal{H}} = \emptyset$.

In Anhang B.4 wird für ein lineares System das Modell gebildet und gezeigt, dass in dem Modell die gleichen Eigenbewegungen auftreten wie in dem System und dass sie beide die gleiche Übertragungsfunktion haben.

Wenn das System nur mit $N > n$ Messungen beobachtbar ist, gibt es (wie in Kapitel 3 für den Beobachter gezeigt) in dem Modell Anfangsbedingungen, die keine E/A-Historie sind. Aus diesen Zuständen kann das Modell Verläufe erzeugen, die nicht von dem System gebildet werden können, somit liegt hier eine Einbettung vor und es gilt $\mathcal{H} \neq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Lemma 4.1.2. *Ein Modell nach Gleichung (4.1) ist Lipschitz-stetig in $(U, Y)_k^M$ und u_k , wenn $h(\cdot)$ und $\tilde{Q}(\cdot, \cdot)$ Lipschitz-stetig sind.*

Beweis 4.1.2. Es sei $\Delta\xi_k = (U - \bar{U}, Y - \bar{Y})_k^M$ die Differenz von zwei beliebigen Zuständen $(U, Y)_k^M, (\bar{U}, \bar{Y})_k^M \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ des Modells und $\Delta u_k = u_k - \bar{u}_k$ die Differenz zweier beliebiger Eingangssignale. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{k+1} &= F(U, Y)_k^M + g(u_k, h(\tilde{Q}(U_k^M, Y_k^M))) \\ &\quad - F(\bar{U}, \bar{Y})_k^M - g(\bar{u}_k, h(\tilde{Q}(\bar{U}_k^M, \bar{Y}_k^M))) \\ &= F\Delta\xi_k + g(\Delta u_k, h(\tilde{Q}(U_k^M, Y_k^M)) - h(\tilde{Q}(\bar{U}_k^M, \bar{Y}_k^M))) \end{aligned}$$

Mit den Lipschitz-Bedingungen an $h(\cdot)$ und $\tilde{Q}(\cdot, \cdot)$ ergibt sich hierfür

$$|\Delta\xi_{k+1}| \leq |F||\Delta\xi_k| + |g|L_hL_Q|\Delta\xi_k| + |g||\Delta u_k| \quad (4.2)$$

$$\leq \underbrace{(|F| + |g|L_hL_Q)}_{L_{Mod}}(|\Delta\xi_k| + |\Delta u_k|) \quad (4.3)$$

Folglich ist das Modell Lipschitz-stetig in $(U, Y)_k^M$ und u_k , mit der Lipschitzkonstanten L_{Mod} , wenn die erweiterte Umkehrabbildung Lipschitz-stetig ist. \square

Ein so erstelltes Modell ist in der Lage, alle Systemtrajektorien nachzubilden, somit kann es unter anderem verwendet werden, um eine Prädiktion für den Verlauf des Systemausgangs zu machen. Dazu müssen lediglich die E/A-Messungen vom System in das Modell übertragen werden und dieses kann dann die nächsten Werte des Ausgangs berechnen.

Wird das Modell zur Prädiktion verwendet, so wird es mit den Messwerten der Strecke initialisiert. Diese Messungen können aber fehlerbehaftet sein, so dass die Initialwerte $(U, Y)_{k_0}^M$ nicht in \mathcal{H} liegen. Damit das Modell aber einen möglichst realen Verlauf des Systems erzeugt, ist es notwendig, dass der Abstand zwischen der Modelltrajektorie $(U, Y)_k^M$ und \mathcal{H} mit der Zeit abnimmt. Dass es ein solches Modell gibt, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

Beispiel 4.2:

Für das System aus Beispiel 3.3

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} x_k^{(1)} + \varphi(x_k^{(2)}) \\ x_k^{(2)} + u_k \end{bmatrix} \\ y_k &= x_k^{(1)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

wird die Modellierung nach dem beschriebenen Verfahren durchgeführt. Da es mit $N = n = 2$ Messungen beobachtbar ist, ist es für das Modell ausreichend, Speicher der Ordnung 2 zu verwenden. Mittels der Umkehrabbildung nach Gleichung (3.11) und mit Gleichung (4.4) erfolgt

$$y_k = h(Q(U_k, Y_k)) = y_{k-1} + \varphi(\varphi^{-1}(y_{k-1} - y_{k-2}) + u_{k-2}) \quad (4.5)$$

Bei dem Modell werden nun die Historien U_k und Y_k durch die Zustände der Filter $U_k^M, Y_k^M \in \mathbb{R}^2$ ersetzt und somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_{k+1}^M \\ Y_{k+1}^M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k^M \\ Y_k^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ y_k^M \end{bmatrix} \\ y_k^M &= Y_k^{M(1)} + \varphi(\varphi^{-1}(Y_k^{M(1)} - Y_k^{M(2)}) + U_k^{M(2)}) \end{aligned}$$

als Ein/Ausgangsmodell des Systems. \square

4.2 Stabile und instabile Einbettung

Bei einer „echten“ Einbettung des Systems (d.h. $\bar{\mathcal{H}} \neq \emptyset$) werden vom Modell in der Regel auch Historien $(U, Y)_k^M$ erzeugt, die auf Dauer nicht in \mathcal{H} liegen. Zwar schwingt der Beobachter in endlicher Zeit ein, aber da das Modell durch eine Rückkopplung erzeugt wird, haben die Anfangswerte einen Einfluss auf den weiteren Verlauf. Genau genommen handelt es sich dabei um die Frage nach der „internen Stabilität“ des Modells. Diese kann als Stabilität im Sinne von Lyapunov definiert werden, wenn man den Ursprung durch die Menge \mathcal{H} ersetzt. Vorteilhaft ist exponentielle Stabilität nach folgender Definition.

Definition 4.2.1. *Eine Einbettung von Σ in M wird exponentiell stabil genannt, wenn es $c_E \geq 1$ und $0 \leq \alpha_E < 1$ gibt, so dass für beliebige $(U, Y)_{k_0}^M \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ und $\{u_k\}$*

$$\text{dist}\{(U, Y)_k^M, \mathcal{H}\} \leq c_E \alpha_E^{k-k_0} \text{dist}\{(U, Y)_{k_0}^M, \mathcal{H}\} \quad \forall k \geq k_0 \quad (4.6)$$

gilt.

Dabei bezeichne $\text{dist}((U, Y)_k^M, \mathcal{H})$ den Abstand des aktuellen Modellzustandes $(U, Y)_k^M$ zum Teilraum \mathcal{H} aller Historien, welche das System besitzen kann. Dies wird als exponentiell stabile Einbettung bezeichnet, man sagt auch:

\mathcal{H} ist ein Attraktor von M .

Die Stabilität der Einbettung hängt von der Erweiterung der Umkehrabbildung ab. Dass die Erweiterung zu einer stabilen, als auch zu einer instabilen Einbettung führen kann, wird an folgendem Beispiel gezeigt.

Beispiel 4.3:

Für das System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} x_{k-1} &= 2x_k + u_{k-1} \\ y_k &= x_k \end{aligned}$$

würden, weil es linear ist, Filter 1. Ordnung ausreichen. Da aber stabile und instabile Einbettung gezeigt werden sollen, werden Filter 2. Ordnung verwendet, d.h. $Y_k = [y_{k-1}, y_{k-2}]^T$ und $U_k = [u_{k-1}, u_{k-2}]^T$. Dies führt somit zu der Beobachtungsabbildung

$$\mathcal{Y}(U_k, x_k) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ 2u_{k-1} + u_{k-2} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Die Abbildung $\mathcal{Y}(U_k, \mathbb{R})$ entspricht einer mit x_k parametrisierten Geraden im \mathbb{R}^2 , die den Richtungsvektor $[2, 4]^T$ und den Ortsvektor $[u_{k-1}, 2u_{k-1} + u_{k-2}]^T$ hat.

Setzt man die rechte Seite von Gleichung (4.7) mit der gemessenen Ausgangshistorie Y_k gleich, so erhält man 2 Gleichungen für die Bestimmung des skalaren Zustandes x_k . Aus diesen lassen sich die beiden Bestimmungsgleichungen

$$Q_{1,0} : \quad x_k = \frac{1}{2}y_{k-1} - \frac{1}{2}u_{k-1} \quad (4.8)$$

$$Q_{0,1} : \quad x_k = \frac{1}{4}y_{k-2} - \frac{1}{4}u_{k-2} - \frac{1}{2}u_{k-1} \quad (4.9)$$

für x_k ermitteln. Folglich kann, mit $\alpha + \beta = 1$, jede Kombination der Art

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,\beta} : \quad x_k &= \alpha \left(\frac{1}{2}y_{k-1} - \frac{1}{2}u_{k-1} \right) + \beta \left(\frac{1}{4}y_{k-2} - \frac{1}{4}u_{k-2} - \frac{1}{2}u_{k-1} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} Y_k + \begin{bmatrix} -\frac{(\alpha + \beta)}{2} & -\frac{\beta}{4} \end{bmatrix} U_k \end{aligned} \quad (4.10)$$

als mathematische Beschreibung der Umkehrabbildung $Q_{\alpha,\beta}(U_k, Y_k)$ verwendet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Umkehrabbildung $Q_{\alpha,\beta}(U_k, Y_k)$ den Definitionsbereich $(U, Y)_k \in \mathcal{H}$ hat.

Für die Erweiterung ist es hier möglich, bei Beibehaltung der Gleichung (4.10) mit $\tilde{Q}_{\alpha,\beta}(U_k, Y_k)$ statt $Q_{\alpha,\beta}(U_k, Y_k)$, den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ zu erweitern.

Bei dieser erweiterten Umkehrabbildung gilt für $(U, Y)_k \in \bar{\mathcal{H}}$ und $(\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)$ im allgemeinen

$$\tilde{Q}_{\alpha_1, \beta_1}(U_k, Y_k) \neq \tilde{Q}_{\alpha_2, \beta_2}(U_k, Y_k) \quad ,$$

d.h. je nach Wahl von α und β ergibt sich eine andere Erweiterung.

Für die Erstellung des Modells werden die Historien U_k und Y_k durch die Modellzustände U_k^M und Y_k^M ersetzt. Für den Ausgang des Modells erhalten wir wegen $y_k^M = \hat{x}_k$ und aus (4.10)

$$y_k^M = \tilde{Q}_{\alpha,\beta}(U_k^M, Y_k^M) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\beta}{4} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k^M \\ Y_k^M \end{bmatrix} \quad . \quad (4.11)$$

Dies kann in die Modellgleichung 4.1 eingesetzt werden, so dass sich

die Modelldarstellung

$$\begin{bmatrix} U_{k+1}^M \\ Y_{k+1}^M \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\beta}{4} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_M} \begin{bmatrix} U_k^M \\ Y_k^M \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_M} u_k$$

$$y_k^M = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\beta}{4} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{4} \end{bmatrix}}_{C_M} \begin{bmatrix} U_k^M \\ Y_k^M \end{bmatrix}$$

ergibt. Die Eigenwerte des Modells lassen sich mittels des charakteristischen Polynoms der Matrix A_M berechnen.

$$P(z) = \det(zI - A_M) = z^4 - \frac{\alpha}{2}z^3 - \frac{\beta}{4}z^2$$

Zwei Eigenwerte bei $\mu = 0$ sind vom Eingangsfiler und die anderen Eigenwerte sind

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(\alpha - 1) = -\frac{1}{2}\beta \end{aligned} .$$

Dabei entspricht $\mu_1 = \frac{1}{2}$ dem Eigenwert des Systems, wobei dieses rückwärts in der Zeit gegeben war und $\mu_2 = -\frac{1}{2}\beta$ ist abhängig von der Wahl von α und β für die Umkehrabbildung.

Für das Modell ergibt sich für $|\beta| \geq 2$ ein instabiler Eigenwert und somit eine instabile Einbettung. Für $|\beta| < 2$ ist die Einbettung hingegen stabil und die Modelltrajektorien konvergieren gegen die Systemtrajektorien. Insbesondere ergibt sich für $\beta = 0$ eine Dead-Beat-Einbettung, d.h. das Modell befindet sich nach einem Schritt in \mathcal{H} .

Für die Konvergenz der Modelltrajektorien ist zusätzlich noch wichtig, dass Modell und System die gleiche Übertragungsfunktion $G_{uy}(z)$ besitzen. In diesem Beispiel ist

$$G_{uy}(z) = C_M(zI - A_M)^{-1}B_M = -\frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}$$

sowohl für das Modell, als auch für das System, dabei ist zu beachten, dass das System rückwärts in der Zeit gegeben ist.

Der Effekt, der durch die Erweiterung von $Q_{\alpha,\beta}(\cdot, \cdot)$ auf $\tilde{Q}_{\alpha,\beta}(\cdot, \cdot)$ erreicht wird, lässt sich auch als Projektion von $(U, Y)_k^M$ auf \mathcal{H} , mit nachfolgender Anwendung von $Q_{\alpha,\beta}(\cdot, \cdot)$, deuten:

Die erweiterte Umkehrabbildung definiert einen Zustand \hat{x}_k als

$$\hat{x}_k := \tilde{Q}_{\alpha,\beta}(U_k^M, Y_k^M) \quad .$$

Zu diesem Zustand und der Eingangshistorie U_k^M gehört die Ausgangshistorie

$$\hat{Y}_k^M = \mathcal{Y}(U_k^M, \hat{x}_k) \quad .$$

Folglich ist $(U, \hat{Y})_k^M \in \mathcal{H}$, d.h. $(U, Y)_k^M$ ist auf \mathcal{H} projiziert. Anwendung von $Q_{\alpha,\beta}(\cdot, \cdot)$ auf $(U, \hat{Y})_k^M$ ergibt nun

$$Q_{\alpha,\beta}(U_k^M, \hat{Y}_k^M) = \hat{x}_k$$

Die Auswertung von

$$\hat{Y}_k^M = \mathcal{Y}(U_k^M, \tilde{Q}_{\alpha,\beta}(U_k^M, Y_k^M))$$

liefert, in diesem Beispiel, nach einigen Rechenschritten

$$\hat{Y}_k^M = Y_k^M + \underbrace{\begin{bmatrix} -\beta \\ 2\alpha \end{bmatrix}}_p \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\gamma(U_k^M, Y_k^M)} \begin{bmatrix} U_k^M \\ Y_k^M \end{bmatrix} \quad .$$

Somit kann nun für jedes Paar α, β die Projektionsrichtung p und auch die Länge der Projektion ($|p||\gamma(U_k^M, Y_k^M)|$) bestimmt werden. So wird z.B. bei Gleichung 4.8, mit $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, parallel zu $Y_k^{M(2)}$ und bei Gleichung 4.9 parallel zu $Y_k^{M(1)}$ projiziert. \square

4.2.1 Existenz einer stabilen Einbettung

Am letzten Beispiel ist zu sehen, dass die Stabilität der Einbettung von der Erweiterung der Umkehrabbildung abhängt. Wünschenswert wäre es sicherlich, immer eine stabile Einbettung zu haben. Dies würde sicherstellen, dass der Modellzustand gegen die Menge \mathcal{H} aller Systemhistorien konvergieren würde. Bei einer instabilen Einbettung gäbe es Modellverläufe, die nicht gegen die Menge \mathcal{H} konvergieren, folglich können die Abweichungen immer größer werden, wenn das Modell iteriert wird. Somit könnten selbst kleine Abweichungen durch Messfehler, beim Messen der Ein- und Ausgänge des Systems, oder durch numerische Rundungsfehler, beim

Übertragen der Messwerte in das Modell am Rechner, vergrößert werden. Der Modellverlauf wäre nicht mehr mit einem Verlauf des Systems zu vergleichen.

Wenn die Einbettung hingegen stabil ist, dann verschwinden diese Abweichungen und der Modellverlauf entspricht nach einiger Zeit einem Systemverlauf.

Hier soll nun dargestellt werden, dass es stets möglich ist, eine stabile Einbettung zu gewährleisten, derart, dass der Modellverlauf nach endlicher Zeit exakt einem Systemverlauf entspricht. Dies wird mittels einer Rückführung $S((U, Y)_k^M)$ realisiert (s. Abb. 4.5), welche nicht-systemkonsistente Zustände des Modells in einem Schritt auf systemkonsistente Werte bringt.

Wenn die stabile Einbettung in einem Schritt möglich ist, ist auch klar, dass es in mehreren Schritten exakt möglich ist, aber wegen der einfacheren Betrachtung wird in dieser Arbeit nur auf die stabile Einbettung in einem Schritt eingegangen.

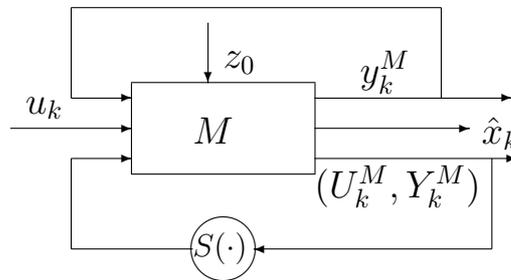


Abbildung 4.5: Stabilisierung der Einbettung durch Rückkopplung $S((U, Y)_k^M)$

Den Zustandsraum des Modells kann man sich in 2 Bereiche unterteilt denken und zwar in \mathcal{H} und $\bar{\mathcal{H}}$. Wenn für den aktuellen Modellzustand $(U, Y)_{k_0}^M \in \mathcal{H}$ gilt, dann muss $S((U, Y)_{k_0}^M) = 0$ sein, da \mathcal{H} invariant für das Modell ist und eine echte Systemtrajektorie erzeugt werden soll. Wenn $(U, Y)_{k_0}^M \in \bar{\mathcal{H}}$ ist, dann sorgt $S((U, Y)_{k_0}^M)$ dafür, dass $(U, Y)_k^M$ mit $k > k_0$ in \mathcal{H} liegt, für alle weiteren Schritte generiert das Modell dann echte Systemtrajektorien.

Eine Möglichkeit eine stabile Einbettung zu erhalten, ist, wie bei der Erweiterung der Umkehrabbildung, alle Zustände $(U, Y)_k^M \in \bar{\mathcal{H}}$ auf \mathcal{H} zu projizieren, diese Werte in die Filter zu schreiben und dann mit diesen weiterzurechnen. Dies hat aber den Nachteil, dass das Modell nicht mehr unbedingt Lipschitz ist, sondern Sprünge in $(U, Y)_k^M$ auftreten können. Dieses Vorgehen wird im Anhang B.5 kurz erläutert.

Eine weitere Möglichkeit, um eine stabile Einbettung zu erhalten, wird durch folgendes Lemma beschrieben.

Lemma 4.2.1. *Es sei Q_{LF} eine Lipschitzstetige Fortsetzung der Umkehrabbildung Q . Dann gilt: Σ ist stabil eingebettet in das E/A-Modell*

$$M^* : \quad (U, Y)_{k+1}^M = F(U, Y)_k^M + (gu_k, gy_k^M + S((U, Y)_k^M)) \quad (4.12)$$

$$y_k^M = h(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) \quad (4.13)$$

mit

$$S((U, Y)_k^M) := F\{\mathcal{Y}(U_k^M, Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) - Y_k^M\} \quad (4.14)$$

und M^* ist Lipschitz-stetig, d.h. für beliebige $U_k^M, U_k'^M, Y_k^M, Y_k'^M \in \mathbb{R}^N$ und $u_k, u_k' \in \mathbb{R}$ gibt es ein $L_M > 0$, so dass gilt

$$\begin{aligned} |(U, Y)_{k+1}^M - (U', Y')_{k+1}^M| &\leq L_M(|U_k^M - U_k'^M| + |Y_k^M - Y_k'^M| + |u_k - u_k'|) \\ |y_k^M - y_k'^M| &\leq L_M(|U_k^M - U_k'^M| + |Y_k^M - Y_k'^M|) \quad . \end{aligned}$$

Beweis 4.2.1. Der Beweis erfolgt über die Konstruktion von $S(\cdot)$. Zunächst wird von dem aktuellen Modellzustand

$$(U, Y)_k^M \in \bar{\mathcal{H}}$$

ausgegangen. Diesem kann mittels der Umkehrabbildung Q_{LF} ein Zustand

$$\hat{x}_k = Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M) \quad (4.15)$$

zugeordnet werden.

Für dieses \hat{x}_k kann nun mit U_k^M und der Beobachtungsabbildung eine systemkonsistente Ausgangshistorie

$$\hat{Y}_k^M = \mathcal{Y}(U_k^M, \hat{x}_k)$$

berechnet werden, d.h. $(U, \hat{Y})_k^M \in \mathcal{H}$. Nach Definition von Q_{LF} gilt

$$Q_{LF}(U_k^M, \hat{Y}_k^M) = Q_{LF}(U_k^M, \mathcal{Y}(U_k^M, \hat{x}_k)) = \hat{x}_k \quad ,$$

so dass mit (4.15) folgt

$$Q_{LF}(U_k^M, \hat{Y}_k^M) = Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)$$

sowie

$$y_k^M = h(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) = h(Q_{LF}(U_k^M, \hat{Y}_k^M)) \quad . \quad (4.16)$$

Der Zustand $(U, \hat{Y})_k^M$ wäre also derjenige Modellzustand, der der E/A-Historie des Systems mit dem Zustand \hat{x}_k entspricht. Um die dadurch spezifizierte Trajektorie fortzusetzen, braucht man als zeitlich nächsten Modellzustand

$$(U, \hat{Y})_{k+1}^M = F(U, \hat{Y})_k^M y_k + (gu_k, gy_k^M) \quad , \quad (4.17)$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{k+1}^M &= F\hat{Y}_k^M + gy_k^M \\ &= \underbrace{F\hat{Y}_k^M + gy_k^M}_{\text{Iteration des ursprünglichen Zustands}} + \underbrace{F(\hat{Y}_k^M - Y_k^M)}_{\text{Stabilisierungsterm } S((U, Y)_k^M)} \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit Gleichung (4.12) erhält man in M^* genau dann $Y_{k+1}^M = \hat{Y}_{k+1}^M$, wenn $S((U, Y)_k^M) = F(\hat{Y}_k^M - Y_k^M)$ ist, also

$$S((U, Y)_k^M) = F\{\mathcal{Y}(U_k^M, Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) - Y_k^M\} \quad . \quad (4.18)$$

Die somit erreichte Einbettung ist stabil, da nach Gleichung (4.17) das Modell nach einem Schritt einen Zustand $(U, Y)_k^M \in \mathcal{H}$ erreicht.

Für $(U, Y)_k^M \in \mathcal{H}$ ist

$$\mathcal{Y}(U_k^M, Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) = Y_k^M$$

und somit nach Gleichung (4.18)

$$S((U, Y)_k^M) = 0 \quad ,$$

also hat die Stabilisierung keinen Einfluss auf den Modellverlauf, wenn der Modellzustand $(U, Y)_k^M \in \mathcal{H}$ ist. Folglich erzeugt das Modell dann eine echte Systemtrajektorie (vgl. Lemma 4.1.1).

Außerdem ist das Modell mit Einbettung Lipschitz-stetig, da alle rechten Seiten der Berechnungen ebenfalls Lipschitz-stetig sind. Im Anhang A.3 ist ein ausführlicher Beweis für die Lipschitz-Stetigkeit durchgeführt. \square

Eine asymptotisch stabile Einbettung, die nicht in endlicher Zeit einschwingt, kann ebenfalls aus der einschrittigen Stabilisierung bestimmt werden. Wie dies geschehen kann, ist in Anhang B.6 nachzulesen.

Kapitel 5

Regelung

Ausgehend von einem Regelgesetz (Zustandsvektorrückführung) $u_k = K(x_k)$ für das System, welches den exakten Zustand des Systems benötigt, wird mittels Modell und Beobachter ein Regelgesetz erstellt, für welches die Messung des Ausgangs y_k und des Eingangs u_k des Systems ausreicht.

5.1 Zustands-Vektor-Rückführung (ZVR): Von der ZVR für Σ zur ZVR für M

Definition 5.1.1. Für das System

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \quad , x_{k_0} \\ y_k &= h(x_k) \end{aligned}$$

heißt das Regelgesetz (ZVR für Σ)

$$u_k = K(x_k)$$

exponentiell stabilisierend, wenn es $c, \alpha > 0$ gibt, so dass

$$|u_k|, |x_k| \leq ce^{-\alpha(k-k_0)}|x_{k_0}| \quad , k \geq k_0 \quad (5.1)$$

gilt.

Ausgehend von einem Regelgesetz $u_k = K(x_k)$, welches das System Σ nach Definition 5.1.1 exponentiell stabilisiert, kann mit Hilfe der erweiterten Umkehrabbildung $Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)$ ein Regelgesetz für das Modell des Systems bestimmt werden.

Lemma 5.1.1. *Es sei $S((U, Y)_k^M)$ die einschrittige Stabilisierung der Einbettung nach Lemma 4.2.1. Für das Modell*

$$M : \quad \begin{aligned} (U, Y)_{k+1}^M &= F(U, Y)_k^M + (gu_k^M, gy_k^M + S((U, Y)_k^M)) \quad , (U, Y)_{k_0}^M \\ y_k^M &= h(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

des Systems Σ , ist das Regelgesetz (ZVR für M)

$$u_k^M = K(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M))$$

exponentiell stabilisierend.

Beweis 5.1.1. Ausgehend von den Lipschitzeigenschaften von $h(\cdot)$ und $Q_{LF}(\cdot, \cdot)$, sowie der Gleichung (5.1) gilt

$$\begin{aligned} |u_{k_0}^M| &\leq cL_Q |(U, Y)_{k_0}^M| \\ |y_{k_0}^M| &\leq L_h L_Q |(U, Y)_{k_0}^M| \quad . \end{aligned}$$

Mit der ersten Abschätzung und der Lipschitz-Stetigkeit des Modells nach Lemma 4.2.1 folgt unter Verwendung von $|U| + |Y| \leq 2|(U, Y)|$

$$|(U, Y)_{k_0+1}^M| \leq \underbrace{L_M(2 + cL_Q)}_{c_1} |(U, Y)_{k_0}^M| \quad .$$

Außerdem (auf Grund der einschrittigen Einbettung) ist $(U, Y)_k^M \in \mathcal{H}$ für alle $k \geq k_0 + 1$.

Für $k \geq k_0 + 1$ vergleichen wir den Verlauf von $(U, Y)_k^M$ mit der Trajektorie des (exponentiell stabilen) Regelkreises

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \quad , x_{k_0+1} = Q(U_{k_0+1}^M, Y_{k_0+1}^M) \\ u_k &= K(x_k) \\ y_k &= h(x_k) \end{aligned}$$

und erhalten (da M Modell von Σ ist) rekursiv den Zusammenhang (siehe Lemma 4.1.1)

$$[Q(U_k^M, Y_k^M), u_k^M, y_k^M] = [x_k, u_k, y_k] \quad k \geq k_0 + 1.$$

Für $k \geq k_0 + 1$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned} |u_k^M| &= |u_k| = |K(x_k)| \\ &\leq ce^{-\alpha(k-k_0-1)} |x_{k_0+1}| \\ &\leq ce^{-\alpha(k-k_0-1)} L_Q |(U, Y)_{k_0+1}^M| \\ &\leq ce^{-\alpha(k-k_0-1)} L_Q c_1 |(U, Y)_{k_0}^M| \quad . \end{aligned}$$

Da $e^\alpha c_1 > 1$ ist, kann dies auch als Abschätzung für $|u_{k_0}^M|$ verwendet werden, so dass gilt

$$|u_k^M| \leq \underbrace{cL_Q e^\alpha c_1}_{c_2} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| \quad k \geq k_0. \quad (5.3)$$

Für $k_0 \leq k < k_0 + N$ erhält man daher

$$\begin{aligned} |U_k^M| &= \sqrt{(u_{k-1}^M)^2 + \dots + u_{k_0}^{M2}} + (u_{k_0-1}^M)^2 + \dots + u_{k-N}^{M2}) \\ &\leq \sqrt{u_{k-1}^{M2} + \dots + u_{k_0}^{M2}} + |U_{k_0}^M| \end{aligned} \quad (5.4)$$

und für $k \geq k_0 + N$

$$|U_k^M| \leq \sqrt{u_{k-1}^{M2} + \dots + u_{k-N}^{M2}}. \quad (5.5)$$

Verwendet man nun die Abschätzung für u_k^M nach Gleichung (5.3) in den Gleichungen (5.4) und (5.5), so erhält man für $k_0 \leq k < k_0 + N$

$$|U_k^M| \leq c_2 \sqrt{e^{2\alpha} + \dots + e^{2\alpha(k-k_0)}} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| + |U_{k_0}^M|$$

und für $k \geq k_0 + N$

$$|U_k^M| \leq c_2 \sqrt{e^{2\alpha} + \dots + e^{2\alpha N}} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M|.$$

Daraus ergibt sich die für alle $k \geq k_0$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} |U_k^M| &\leq c_2 \sqrt{e^{2\alpha} + \dots + e^{2\alpha N}} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| + e^{\alpha N} e^{-\alpha(k-k_0)} |U_{k_0}^M| \\ &\leq \underbrace{(c_2 \sqrt{e^{2\alpha} + \dots + e^{2\alpha N}} + e^{\alpha N})}_{c_3} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| \end{aligned}$$

Für den Ausgang y_k^M erhält man entsprechend für $k \geq k_0 + 1$

$$\begin{aligned} |y_k^M| &= |h(x_k)| \\ &\leq L_h c e^{-\alpha(k-k_0-1)} |x_{k_0+1}| \\ &\leq L_h c L_Q e^{-\alpha(k-k_0-1)} |(U, Y)_{k_0+1}^M| \\ &\leq L_h c L_Q c_1 e^{-\alpha(k-k_0-1)} |(U, Y)_{k_0}^M|. \end{aligned}$$

Da $c e^\alpha c_1 > 1$ ist, kann diese Abschätzung auch für $|y_{k_0}^M|$ verwendet werden, so dass

$$|y_k^M| \leq \underbrace{L_h c L_Q e^\alpha c_1}_{c_4} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| \quad k \geq k_0 \quad (5.6)$$

gilt.

Die Ausgangshistorie lässt sich somit in ähnlicher Weise abschätzen, wie die Eingangshistorie, es muss lediglich der Einfluss der Stabilisierung $S((U, Y)_k^M)$ (Ausgangshistorie wird im ersten Schritt verändert) berücksichtigt werden. Aus diesem Grund muss für $k_0 + 1 \leq k < k_0 + N$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |Y_k^M| &\leq \sqrt{y_{k-1}^{M^2} + \dots + y_{k_0}^{M^2}} + |Y_{k_0+1}^M| \\ &\leq c_4 \sqrt{e^{2\alpha} + \dots + e^{2\alpha(k-k_0)}} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| + c_1 e^{\alpha N} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| \end{aligned}$$

verwendet werden.

Da außerdem

$$|Y_{k_0}^M| \leq |(U, Y)_{k_0}^M|$$

und für $k \geq k_0 + N$

$$\begin{aligned} |Y_k^M| &\leq \sqrt{y_{k-1}^{M^2} + \dots + y_{k-N}^{M^2}} \\ &\leq c_4 \sqrt{e^{2\alpha} + \dots + e^{2\alpha N}} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| \quad . \end{aligned}$$

gilt, erhält man wie zuvor die für alle $k \geq k_0$ gültige Abschätzung

$$|Y_k^M| \leq \underbrace{(c_4 \sqrt{e^{2\alpha} + \dots + e^{2\alpha N}} + c_1 e^{\alpha N})}_{c_5} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| \quad .$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} |(U, Y)_k^M| &= (|U_k^M|^2 + |Y_k^M|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \underbrace{(c_3^2 + c_5^2)^{\frac{1}{2}}}_{c_6} e^{-\alpha(k-k_0)} |(U, Y)_{k_0}^M| \quad , \end{aligned}$$

für alle $k \geq k_0$, womit die exponentielle Stabilität bewiesen ist. \square

5.2 Beobachter-ZVR (BZVR):

Von der ZVR für M zur BZVR für M und Σ

In diesem Abschnitt wird anstelle der Zustandsvektorrückführung für das Modell eine Beobachter-Zustandsvektorrückführung für das Modell betrachtet. Es wird gezeigt, dass ein solches Regelgesetz, welches nur die Messung des Ausgangs y und des Eingangs u (aber dafür zusätzlich einen Beobachter) benötigt, sowohl das

Modell als auch das System exponentiell stabilisiert.

Die Beobachtung der Modellzustände ist recht einfach, denn

$$\Omega : \quad (\hat{U}, \hat{Y})_{k+1} = F(\hat{U}, \hat{Y})_k + g(u_k, y_k)$$

ist nach Kapitel 3 ein Beobachter für das Modell. Sein Zustand $(\hat{U}, \hat{Y})_k$ ist gleichzeitig ein Schätzwert für den Modellzustand. Dabei sind u_k und y_k Eingang bzw. Ausgang des Modells. Als Kern des Regelgesetzes wird wieder die zuvor betrachtete Zustandsvektorrückführung verwendet.

Lemma 5.2.1. *Es sei M das Modell aus Lemma 5.1.1. Das Regelgesetz (Beobachterzustandsvektorrückführung)*

$$\begin{aligned} u_k^M &= K(Q_{LF}(\hat{U}_k, \hat{Y}_k)) \\ (\hat{U}, \hat{Y})_{k+1} &= F(\hat{U}, \hat{Y})_k + g(u_k, y_k) \end{aligned} \quad (5.7)$$

stabilisiert das Modell M exponentiell.

Beweis 5.2.1. Der Regelkreis, bestehend aus dem Modell M und der Beobachterzustandsvektorrückführung (5.7) lässt sich mit

$$\begin{aligned} v_k &:= gK(Q_{LF}(\hat{U}_k, \hat{Y}_k)) - gK(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) \\ (\Delta U, \Delta Y)_k &:= (\hat{U} - U^M, \hat{Y} - Y^M)_k \end{aligned}$$

folgendermaßen darstellen

$$(U, Y)_{k+1}^M = F(U, Y)_k^M + (gK(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)), gy_k^M) + (0, S((U, Y)_k^M)) + (v_k, 0) \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} (\Delta U, \Delta Y)_{k+1} &= F(\Delta U, \Delta Y)_k - (0, S((U, Y)_k^M)) \\ y_k^M &= h(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Bei Gleichung (5.8) handelt es sich um das nach Lemma 5.1.1 exponentiell stabile, mit Zustandsvektorrückführung geregelte Modell, welches durch v_k „gestört“ ist. Aus der Gleichung (5.9) folgt zunächst für $k = k_0$

$$(\Delta U, \Delta Y)_{k_0+1} = F(\Delta U, \Delta Y)_{k_0} - (0, S((U, Y)_{k_0}^M)) \quad .$$

Für $k \geq k_0 + 1$ ist $(U, Y)_k^M \in \mathcal{H}$ (einschrittige Einbettung, vgl. Beweis von Lemma 4.2.1), folglich $S((U, Y)_k^M) = 0$ und somit

$$(\Delta U, \Delta Y)_k = F^{k-k_0-1}(\Delta U, \Delta Y)_{k_0+1} \quad . \quad (5.10)$$

Aus der Betrachtung zu der Gleichung (A.6) in Anhang A.3 lässt sich

$$\begin{aligned} |S((U, Y)_{k_0}^M)| &\leq (L_B + L_B L_Q) |U_{k_0}^M| + (1 + L_B L_Q) |Y_{k_0}^M| \\ &\leq \underbrace{((L_B + L_B L_Q) + (1 + L_B L_Q))}_{c_7} |(U, Y)_{k_0}^M| \end{aligned}$$

herleiten und somit folgt aus Gleichung (5.10)

$$|(\Delta U, \Delta Y)_k| \begin{cases} \leq |(\Delta U, \Delta Y)_{k_0}| + c_7 |(U, Y)_{k_0}^M| & k_0 \leq k < k_0 + N \\ = 0 & k \geq k_0 + N^\ddagger \end{cases} . \quad (5.11)$$

Die sogenannten Störung v_k lässt sich wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} |v_k| &\leq |g|c(|Q_{LF}(\hat{U}_k, \hat{Y}_k)| + |Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)|) \\ &\leq cL_Q(|(\hat{U}, \hat{Y})_k| + |(U, Y)_k^M|) \\ &\leq 2cL_Q(|(U, Y)_k^M| + |(\Delta U, \Delta Y)_k|) . \end{aligned}$$

Hierfür ergibt sich mit Gleichung (5.11)

$$|v_k| \begin{cases} \leq 2cL_Q(|(U, Y)_k^M| + |(\Delta U, \Delta Y)_{k_0}|) + c_7 |(U, Y)_{k_0}^M| & k_0 \leq k < k_0 + N \\ = 0 & k \geq k_0 + N \end{cases} . \quad (5.12)$$

Aus Gleichung (5.8) mit Gleichung (5.12) und der Lipschitz-Stetigkeit des ungestörten Modells nach Lemma 4.2.1 folgt

$$\begin{aligned} |(U, Y)_{k+1}^M| &\leq L_M(|U_k^M| + |Y_k^M| + |K(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M))|) \\ &\quad + 2cL_Q(|(U, Y)_k^M| + |(\Delta U, \Delta Y)_{k_0}| + c_7 |(U, Y)_{k_0}^M|) \\ &\leq \underbrace{(2L_M + L_M c L_Q + 2cL_Q c_7)}_{p_1} (|(U, Y)_k^M| + |(\Delta U, \Delta Y)_{k_0}| + |(U, Y)_{k_0}^M|) . \end{aligned}$$

Durch Iteration dieser Ungleichung folgt für alle $k = k_0, \dots, k_0 + N$

$$\begin{aligned} |(U, Y)_k^M| &\leq p_1^{k-k_0} |(U, Y)_{k_0}^M| + \left(\sum_{i=1}^{k-k_0} p_1^i \right) (|(\Delta U, \Delta Y)_{k_0}| + |(U, Y)_{k_0}^M|) \\ &\leq \underbrace{\left(p_1^N + \sum_{i=1}^N p_1^i \right)}_{p_2} (|(U, Y)_{k_0}^M| + |(\Delta U, \Delta Y)_{k_0}|) . \end{aligned}$$

Für $k \geq k_0 + N$ ist $v_k = 0$ und daher nach Lemma 5.1.1 der Verlauf von $(U, Y)_k^M$ exponentiell von der Form

$$|(U, Y)_k^M| \leq c_6 e^{-\alpha(k-k_0-N)} |(U, Y)_{k_0+N}^M| .$$

[‡]Es ist bereits $(\Delta U, \Delta Y)_{k_0+N} = 0$, da $F^{N-1}S((U, Y)_k^M) = 0$ ist, vgl. Gleichung (4.14)

Aus den beiden letzten Ungleichungen erhalten wir für alle $k \geq k_0$

$$|(U, Y)_k^M| \leq e^{\alpha N} p_2 c_6 e^{-\alpha(k-k_0)} (|(U, Y)_{k_0}^M| + |(\Delta U, \Delta Y)_{k_0}|)$$

und aus Gleichung (5.11)

$$|(\Delta U, \Delta Y)_k| \leq (1 + c_7) e^{\alpha N} e^{-\alpha(k-k_0)} (|(U, Y)_{k_0}^M| + |(\Delta U, \Delta Y)_{k_0}|) \quad .$$

Damit ist exponentielle Stabilität bewiesen. \square

Nun soll dasselbe Regelgesetz für das System Σ verwendet werden. In diesem Falle sind u_k und y_k Ein- und Ausgang des Systems Σ .

Satz 5.2.2. *Das Regelgesetz (Beobachterzustandsvektorrückführung)*

$$\begin{aligned} u_k &= K(Q_{LF}(\hat{U}_k, \hat{Y}_k)) \\ (\hat{U}, \hat{Y})_{k+1} &= F(\hat{U}, \hat{Y})_k + g(u_k, y_k) \end{aligned}$$

stabilisiert das System Σ exponentiell.

Beweis 5.2.2. Da Σ in M eingebettet ist, gibt es zu jeder Trajektorie des Regelkreises eine äquivalente Trajektorie (mit $x_{k_0} = Q((U, Y)_{k_0}^M)$ und gleichem $(\hat{U}, \hat{Y})_{k_0}$) des Regelkreises nach Lemma 5.2.1. Der Beweis erfolgt daher aus Lemma 5.2.1. \square

Kapitel 6

Abschließende Betrachtung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, aus einem Beobachterkonzept [3] ein Konzept für ein E/A-Modell zu erstellen. Da das Beobachterkonzept im kontinuierlichen lediglich zu einem endlich genauen Beobachter führt, wurde das Konzept auf diskrete Systeme angewandt. Hierzu wurden die entsprechenden Voraussetzungen an das System an die diskrete Betrachtung angepasst. Diese Betrachtung führte zu der Erkenntnis, dass eine bestimmte (vom System abhängige) Anzahl (N) von Ein/Ausgangsmessungen am System ausreichen, um die Beobachtbarkeit sicherzustellen.

Hierbei ging es nur um das Konzept, d.h. es wurde kein bestimmtes Entwurfsverfahren vorgestellt, das i. a. anwendbar ist, sondern nur im Prinzip gezeigt, welche Struktur der Beobachter haben müsste. An einzelnen Beispielen wurde verdeutlicht, dass der Entwurf nicht allgemein auf ein und dieselbe Art durchzuführen ist. Für das E/A-Modell wurde die Messung des Systemausgangs durch die entsprechenden Werte des Beobachtetes ersetzt. Durch diese Maßnahme entstehen im Modell zusätzliche (ggf. instabile) Dynamiken, diese lassen sich aber, wie mittels der einschrittigen Stabilisierung der Einbettung gezeigt wurde, stabilisieren. Somit wurde letztlich gezeigt, dass unter den getroffenen Annahmen für das System immer ein stabiles E/A-Modell entworfen werden kann. Dabei bezieht sich das stabil auf die Einbettung des Systems in den Zustandsraum des Modells.

Auch bei der Modellierung ging es um das Prinzip und nicht um ein bestimmtes Verfahren. Es wurde gezeigt, dass es einen mathematischen Zusammenhang zwischen den Historien (U, Y) und der Eingangshistorie und dem aktuellen Zustand (U, x) gibt. Die technische Umsetzung für diesen Zusammenhang (Beobachtungsabbildung und Umkehrabbildung) ist allerdings nicht so einfach zu klären, hierzu wird gleich noch etwas gesagt.

Diese Arbeit kann als Grundstein für das Erstellen von E/A-Modellen gesehen werden, denn aufbauend auf dem vorgestellten Prinzip und den weitergehenden Betrachtungen, können nun Entwurfsmethoden für spezielle Klassen von Systemen entwickelt werden. Wenn für solche spezielle Systemklassen mehr über die Umkehrabbildung bekannt ist, z. B. darin auftretende mathematische Berechnungen, dann könnten diese Modelle adaptiv anhand von Systemmessungen bestimmt werden.

Wie bereits erwähnt ist die Realisierung der Umkehrabbildung nicht immer klar. Wenn sich diese nicht mathematisch einfach darstellen lässt, können andere Methoden verwendet werden, z. B.

- Minimierung von $|(U, Y) - (U, \mathcal{Y}(U, x))|$ über x
- Speicherung von endlich vielen Historien mit dem dazugehörigen Zustand und Interpolation für die gemessenen Historien.

Hierbei müsste dann jeweils der Einfluss auf das Modell untersucht werden.

Weiterhin könnte noch untersucht werden, wie sich eine Approximation der Diskretisierung auf das Modell auswirkt. Denn in der Praxis wird die Diskretisierung des Systems lediglich approximiert (z.B. numerisch).

Die Idee aus dem kontinuierlichen Beobachterkonzept ein E/A-Modell zu erstellen, könnte aufgegriffen werden. Die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse, insbesondere die Stabilisierung der Einbettung, könnten bezüglich ihrer Anwendbarkeit für die kontinuierliche Betrachtung überprüft werden.

Als weiteren noch zu untersuchenden Punkt sei hier auf die Verwendbarkeit des E/A-Modells für die Prädiktive Regelung hingewiesen, da dieser Punkt in dieser Arbeit nicht behandelt worden ist. Da sich der Zustand des E/A-Modells aus zurückliegenden messbaren Werten des Systems zusammensetzt, kann dieses Modell für die Prädiktion recht einfach initiiert und somit auch verwendet werden.

Anhang A

Sätze, Lemmata und Beweise

A.1 Beibehaltung der Lipschitz-Stetigkeit bei der Diskretisierung

Satz A.1.1. Sei Σ_c Lipschitz-stetig gemäß (2.2). Dann gilt für die Diskretisierungen $\tilde{f}(\cdot, \cdot)$ und $f(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} a) \quad & |\tilde{f}(x_k, u_k) - \tilde{f}(x'_k, u'_k)| \leq L(|x_k - x'_k| + |u_k - u'_k|) \\ b) \quad & |f(x_k, u_{k-1}) - f(x'_k, u'_{k-1})| \leq L(|x_k - x'_k| + |u_{k-1} - u'_{k-1}|) \quad . \end{aligned}$$

Beweis A.1.1. a) Um Σ_c vorwärts in der Zeit zu integrieren, setzen wir

$$t = kT + s \quad t \in [kT, kT + T) \quad .$$

Zudem definieren wir

$$\overset{\circ}{\xi} := \frac{d}{ds}\xi \quad ,$$

so dass man durch Integration in positiver s -Richtung der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\xi} &= f_c(\xi, u_k) \quad , \xi(kT) = x_k \\ \overset{\circ}{\xi}' &= f_c(\xi', u'_k) \quad , \xi'(kT) = x'_k \end{aligned}$$

die Lösungen $\xi(s), \xi'(s)$ mit

$$\tilde{f}(x_k, u_k) = \xi(T) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f}(x'_k, u'_k) = \xi'(T) \quad (\text{A.1})$$

erhält.

Bildet man die Differenz dieser beiden Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Delta}\xi &= (\xi - \xi')^\circ \\ &= f_c(\xi, u_k) - f_c(\xi + (\xi' - \xi), u_k + (u'_k - u_k)) \\ &= f_c(\xi, u_k) - f_c(\xi + \Delta\xi, u_k + \Delta u_k) \quad \Delta\xi(0) = x_k - x'_k \quad . \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Verläufe kann dargestellt werden als

$$\Delta\xi(s) = \Delta\xi(0) + \int_0^s f_c(\xi(\tau), u_k) - f_c(\xi(\tau) + \Delta\xi(\tau), u_k + \Delta u_k) d\tau \quad .$$

Bildet man den Betrag und verwendet die Dreiecksungleichung, sowie die Gleichung (2.2), so führt dies zu der Abschätzung

$$|\Delta\xi(s)| \leq |\Delta\xi(0)| + \int_0^s L_c |\Delta\xi(\tau)| + L_c |\Delta u_k| d\tau \quad .$$

Für $s \in [0, T)$ lässt sich dies abschätzen durch

$$|\Delta\xi(s)| \leq \underbrace{|\Delta\xi(0)| + L_c T |\Delta u_k| + \int_0^s L_c |\Delta\xi(\tau)| d\tau}_{\zeta(s):=} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Das durch die rechte Seite definierte $\zeta(s)$ ist nach s differenzierbar und es gilt $|\Delta\xi(s)| \leq \zeta(s)$. Somit erfolgt

$$\overset{\circ}{\zeta} = L_c |\Delta\xi| \leq L_c \zeta$$

und als Lösung dieser Ungleichung

$$\zeta(s) \leq \zeta(0) e^{L_c s} \quad .$$

Mit $\zeta(0)$ aus (A.2) und $|\Delta\xi(s)| \leq \zeta(s)$ folgt somit für $s = T$

$$|\Delta\xi(T)| \leq (|\Delta\xi(0)| + L_c T |\Delta u_k|) e^{L_c T} \quad .$$

Mit (A.1), $\xi(0) = x_k$ bzw. $\xi'(0) = x'_k$ und $L = L_c T e^{L_c T}$ folgt

$$|\tilde{f}(x_k, u_k) - \tilde{f}(x'_k, u'_k)| \leq L (|x_k - x'_k| + |u_k - u'_k|) \quad ,$$

womit die erste Aussage im Satz A.1.1 bewiesen wäre.

b) Für die Integration rückwärts in der Zeit, setzen wir

$$t = kT - s \quad t \in [kT, kT - T)$$

und erhalten $x(t) = x(kT - s)$ und

$$\overset{\circ}{x} = -\dot{x} = -f_c(x, u_{k-1}) \quad .$$

Nun werden ähnlich wie in a) die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\xi} &= -f_c(\xi, u_{k-1}) & , \xi(0) &= x_k \\ \overset{\circ}{\xi}' &= -f_c(\xi', u'_{k-1}) & , \xi(0) &= x'_k \quad ,\end{aligned}$$

betrachtet, für deren Lösungen $\xi(s), \xi'(s)$ gilt nun

$$f(x_k, u_{k-1}) = \xi(T) \quad \text{bzw.} \quad f(x'_k, u'_{k-1}) = \xi'(T) \quad .$$

Hiermit lassen sich die gleichen Schritte wie in a) durchführen, nur dass nun u_{k-1} statt u_k verwendet wird. Bei der Betragsbildung und Verwendung der Gleichung (2.2) fallen die negativen Vorzeichen in ξ weg. Es erfolgt letztlich

$$\begin{aligned}|f(x_k, u_{k-1}) - f(x'_k, u'_{k-1})| &= |\Delta\xi(T)| \\ &\leq \underbrace{L_c T e^{L_c T}}_L (|x_k - x'_k| + |u_{k-1} - u'_{k-1}|) \quad ,\end{aligned}$$

womit auch die zweite Aussage von Satz A.1.1 bewiesen wäre. \square

A.2 Lipschitz-stetige Fortsetzung

Sei $Q(\mathbb{R}^N, \cdot)$ die Menge der Umkehrabbildungen. Diese sind nach Satz 3.1.2 Lipschitz-stetig. Die Lipschitzkonstante sei L_Q .

Als Erweiterung von Q sei nun eine Abbildung

$$Q_{LF} : \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$$

komponentenweise definiert als

$$Q_{LF,i}(a, b) := \inf_{(\xi, \zeta) \in \mathcal{H}} \{Q_i(\xi, \zeta) + L_Q |(\xi, \zeta) - (a, b)|\} \quad a, b \in \mathbb{R}^N.$$

Satz A.2.1. *Die erweiterte Abbildung Q_{LF} hat die Eigenschaften*

1. Für alle $(a, b) \in \mathcal{H}$ gilt $Q_{LF}(a, b) = Q(a, b)$
2. $Q_{LF}(a, b)$ ist Lipschitz-stetig mit der Konstanten L_Q .

Beweis A.2.1. (In diesem Beweis wird die Maximumnorm verwendet, da er sich mit dieser leicht nachvollziehen lässt)

1. Sei $(a, b) \in \mathcal{H}$, dann ist $Q(a, b)$ definiert und es gilt

$$Q_{LF,i}(a, b) = Q_i(a, b) + \inf_{(\xi, \zeta) \in \mathcal{H}} \{Q_i(\xi, \zeta) - Q_i(a, b) + L_Q|(\xi, \zeta) - (a, b)|\}. \quad (\text{A.3})$$

Da $Q(\cdot, \cdot)$ Lipschitz ist gilt

$$\begin{aligned} Q_i(\xi, \zeta) - Q_i(a, b) &\geq -|Q_i(\xi, \zeta) - Q_i(a, b)| \\ &\geq -|Q(\xi, \zeta) - Q(a, b)| \\ &\geq -L_Q|(\xi, \zeta) - (a, b)| \end{aligned}$$

und somit folgt für $(\xi, \zeta) = (a, b)$

$$\inf_{(\xi, \zeta) \in \mathcal{H}} \{Q_i(\xi, \zeta) - Q_i(a, b) + L_Q|(\xi, \zeta) - (a, b)|\} = 0 \quad .$$

Wird dies in die Gleichung (A.3) eingesetzt, dann bleibt nur $Q_{LF,i}(\xi, \zeta) = Q_i(a, b)$ übrig, da dieses aber für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, folgt

$$Q_{LF}(a, b) = Q(a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathcal{H} \quad .$$

2. Betrachtet werden 2 Punkte $(a, b), (a + \Delta a, b + \Delta b) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, dann gilt für $(a + \Delta a, b + \Delta b)$

$$Q_{LF,i}(a + \Delta a, b + \Delta b) = \inf_{(\xi, \zeta) \in \mathcal{H}} (Q_i(\xi, \zeta) + L_Q|(\xi, \zeta) - (a + \Delta a, b + \Delta b)|) \quad .$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$|(\xi, \zeta) - (a, b)| - |(\Delta a, \Delta b)| \leq |(\xi, \zeta) - (a + \Delta a, b + \Delta b)| \leq |(\xi, \zeta) - (a, b)| + |(\Delta a, \Delta b)|$$

und von

$$Q_{LF,i}(a, b) = \inf_{(\xi, \zeta) \in \mathcal{H}} (Q_i(\xi, \zeta) + L_Q|(\xi, \zeta) - (a, b)|)$$

ergibt sich,

$$Q_{LF,i}(a, b) - L_Q|(\Delta a, \Delta b)| \leq Q_{LF,i}(a + \Delta a, b + \Delta b) \leq Q_{LF,i}(a, b) + L_Q|(\Delta a, \Delta b)| \quad .$$

Dies lässt sich auch darstellen als

$$|Q_{LF,i}(a + \Delta a, b + \Delta b) - Q_{LF,i}(a, b)| \leq L_Q|(\Delta a, \Delta b)|$$

und da dieses wieder für alle $i = 1, \dots, n$ gilt erfolgt

$$|Q_{LF}(a + \Delta a, b + \Delta b) - Q_{LF}(a, b)| \leq L_Q|(\Delta a, \Delta b)| \quad ,$$

womit gezeigt ist, dass $Q_{LF}(a, b)$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstanten L_Q ist. \square

A.3 Lipschitz-Stetigkeit des Modells M^*

Folgend wird die Lipschitzstetigkeit des Modells mit Stabilisierung nach Lemma 4.2.1 bewiesen.

Beweis A.3.1.

Für beliebige $U_k^M, \bar{U}_k^M, Y_k^M, \bar{Y}_k^M \in \mathbb{R}^N$ und $u_k, \bar{u}_k \in \mathbb{R}$ erfolgt nach Gleichung 4.12

$$|(U, Y)_{k+1}^M - (\bar{U}, \bar{Y})_{k+1}^M| \leq |F((U, Y)_k^M - (\bar{U}, \bar{Y})_k^M) + (g(u_k - \bar{u}_k), 0)| \quad (\text{A.4})$$

$$+ |(0, g(h(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) - h(Q_{LF}(\bar{U}_k^M, \bar{Y}_k^M))))| \quad (\text{A.5})$$

$$+ |S((U, Y)_k^M) - S((\bar{U}, \bar{Y})_k^M)| \quad . \quad (\text{A.6})$$

In der Zeile A.4 lässt sich

$$|F((U, Y)_k^M - (\bar{U}, \bar{Y})_k^M) + (g(u_k - \bar{u}_k), 0)| \leq |(U, Y)_k^M - (\bar{U}, \bar{Y})_k^M| + |u_k - \bar{u}_k|$$

abschätzen. Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von $h(\cdot)$ und $Q_{LF}(\cdot)$, ergibt sich für Zeile A.5 die Abschätzung

$$|(0, g(h(Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) - h(Q_{LF}(\bar{U}_k^M, \bar{Y}_k^M))))| \leq L_h L_Q |(U, Y)_k^M - (\bar{U}, \bar{Y})_k^M| \quad .$$

Die Zeile A.6 ergibt

$$|S((U, Y)_k^M) - S((\bar{U}, \bar{Y})_k^M)| \leq |\mathcal{Y}(U_k^M, Q_{LF}(U_k^M, Y_k^M)) - Y_k^M - \mathcal{Y}(\bar{U}_k^M, Q_{LF}(\bar{U}_k^M, \bar{Y}_k^M)) + \bar{Y}_k^M|$$

Wendet man hierauf Satz 3.1.1 (Lipschitz-Stetigkeit von $\mathcal{Y}(\cdot)$), Satz A.2.1 (Lipschitz-Stetigkeit von $Q_{LF}(\cdot)$) und die Dreiecksungleichung an, so erfolgt

$$|S((U, Y)_k^M) - S((\bar{U}, \bar{Y})_k^M)| \leq (L_B + L_B L_Q) |U_k^M - \bar{U}_k^M| + (1 + L_B L_Q) |Y_k^M - \bar{Y}_k^M|.$$

Zusammenfassen der Abschätzungen und anwenden der Dreiecksungleichung liefert

$$|(U, Y)_{k+1}^M - (\bar{U}, \bar{Y})_{k+1}^M| \leq (1 + L_B + L_B L_Q) |U_k^M - \bar{U}_k^M| + (2 + L_h L_Q + L_B L_Q) |Y_k^M - \bar{Y}_k^M| + |u_k - \bar{u}_k| \quad .$$

Wählt man nun $L_M = \max\{1 + L_B + L_B L_Q, 2 + L_h L_Q + L_B L_Q\}$, so ist die Lipschitz-Stetigkeit des Modells M^* nach Lemma 4.2.1 bewiesen.

Anhang B

Beispiele und Ergänzungen

B.1 Nachweis der Beobachtbarkeit für Bsp. 3.4

Da sich die nachfolgende Betrachtung nur auf die aktuellen Zustände $x_k, x'_k \in \mathbb{R}$ bezieht, wird der Laufindex k weggelassen. Weiterhin wird zur Vereinfachung in diesem Abschnitt $Y = \mathcal{Y}(x)$, $Y' = \mathcal{Y}(x')$ und $\Delta Y = Y - Y'$ verwendet. Außerdem wird $x' = x + \Delta x$ gesetzt, so dass letztlich ΔY durch Δx abgeschätzt wird.

Für das Beispiel 3.4 müssen folgende Fälle unterschieden werden, um die Beobachtbarkeit nachzuweisen.

1. Fall: $x, x' \geq 0$

Dies führt zu den Historien

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \quad Y' = \begin{bmatrix} x + \Delta x \\ x + \Delta x \end{bmatrix} .$$

Betrachtet man nun die Differenz zweier solcher Historien, so führt dies zu

$$\Delta Y = \begin{bmatrix} -\Delta x \\ -\Delta x \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta Y| = \sqrt{2}|\Delta x| .$$

Fall 2: $x, x' \leq 0$

Mit dem gleichen Ansatz wie oben ergeben sich hierbei die Historien

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{4}x \end{bmatrix} \quad Y' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\Delta x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\Delta x \end{bmatrix}$$

und somit folgt für die Differenz zweier Historien

$$\Delta Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\Delta x \\ -\frac{1}{4}\Delta x \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta Y| = \frac{\sqrt{5}}{4}|\Delta x| .$$

Fall 3: $x \geq 0$, $x' \leq 0$

In diesem Fall ergibt sich nun

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \quad Y' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\Delta x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\Delta x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\Delta x \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\Delta x \end{bmatrix} .$$

Für die Differenz dieser Historien lässt sich nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Delta Y| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\Delta x\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{13}{16}x^2 - \frac{14}{16}x\Delta x + \frac{5}{16}\Delta x^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{4}x - \frac{7}{4\sqrt{13}}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{5}{16} - \frac{49}{16 \cdot 13}\right)\Delta x^2} \\ &\geq \sqrt{\frac{1}{13}\Delta x^2} \geq \frac{1}{4}|\Delta x| \end{aligned}$$

durchführen.

Der Fall $x \leq 0$ und $x' \geq 0$ entspricht dem 3. Fall, wenn man x und x' austauscht. Somit ergibt sich für alle $x, x' \in \mathbb{R}$

$$|\Delta Y| \geq \frac{1}{4}|\Delta x|.$$

Somit ist das System nach Definition 2.3.1 beobachtbar, mit $N = 2$ und $c = \frac{1}{4}$.

B.2 Berechnung der Beobachtungsabbildung zu Beispiel 3.5

Da für y_k drei Fälle unterschieden werden, müssen auch bei der Berechnung der Beobachtungsabbildung Fallunterscheidungen gemacht werden. Somit ergibt sich

je nach Wert von x_k die Beobachtungsabbildung

$$\mathcal{Y}(x_k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0.5x_k + 2.5 \\ 0.25x_k + 3.25 \end{bmatrix} & x_k < -13 \\ \begin{bmatrix} 0.5x_k + 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} & -13 \leq x_k < -5 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25x_k + 1.25 \end{bmatrix} & -5 \leq x_k \leq -1 \\ \begin{bmatrix} 0.5x_k + 0.5 \\ 0.25x_k + 1.25 \end{bmatrix} & -1 < x_k \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

B.3 Vergleich mit Luenberger Beobachter bei linearen Systemen

Der in dieser Arbeit betrachtete Beobachter bestimmt aus den n zurückliegenden Messwerten (U_k, Y_k) den aktuellen Systemzustand. Er verwendet hierzu die Umkehrabbildung $Q(U_k, Y_k)$, welche bei linearen Systemen eine Matrixmultiplikation ist (siehe(3.10)), d.h.

$$x_k = Q \begin{bmatrix} U_k \\ Y_k \end{bmatrix} \quad Q \in \mathbb{R}^{n \times 2n} \quad . \quad (\text{B.2})$$

Zum Vergleich wird nun ein Dead-Beat-Beobachter nach Luenberger betrachtet, dieser hat ebenfalls die Eigenschaft, dass nach n Schritten der exakte Systemzustand x_k bekannt ist.

Die Differenzgleichung eines Luenberger Beobachters lautet

$$\hat{x}_{k+1} = (A + hc)\hat{x}_k + bu_k - h \underbrace{cx_k}_{y_k} \quad .$$

Ist dieser als Dead-Beat-Beobachter ausgelegt, so sind alle Eigenwerte der Matrix $A + hc$ gleich 0 und es gilt $(A + hc)^n = 0$.

Zur Vereinfachung wird in der folgenden Betrachtung zunächst $n = 3$ angenommen und als Startzeitpunkt wird $k - 3$ gewählt, da somit der Vergleich offensichtlich wird. Ausgehend von \hat{x}_{k-3} erfolgt für den nächsten Zustand

$$\hat{x}_{k-2} = (A + hc)\hat{x}_{k-3} + bu_{k-3} - hy_{k-3}$$

und in den weiteren Schritten ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k-1} &= (A + hc)^2 \hat{x}_{k-3} + (A + hc)bu_{k-3} - (A + hc)hy_{k-3} + bu_{k-2} - hy_{k-2} \\ \hat{x}_k &= (A + hc)^3 \hat{x}_{k-3} + (A + hc)^2 bu_{k-3} - (A + hc)^2 hy_{k-3} + (A + hc)bu_{k-2} \\ &\quad - (A + hc)hy_{k-2} + bu_{k-1} - hy_{k-1} \quad .\end{aligned}$$

Da $(A + hc)^3 = 0$ ist, ist die rechte Seite nur noch von den zurückliegenden Ein- und Ausgangswerten abhängig. Außerdem ist der Beobachter nach 3 Schritten eingeschwungen, so dass hier $x_k = \hat{x}_k$ gilt. Also folgt

$$x_k = [b(A + hc)b(A + hc)^2b - h - (A + hc)h - (A + hc)^2h] \begin{bmatrix} U_k \\ Y_k \end{bmatrix}$$

für die Berechnung des Systemzustands. Ein Vergleich mit der Gleichung (B.2) führt, für allgemeines n , zu

$$Q = [b(A + hc)b \dots (A + hc)^{n-1}b - h - (A + hc)h \dots - (A + hc)^{n-1}h] \quad ,$$

dabei ist h eben so zu bestimmen, dass die Eigenwerte von $A + hc$ alle gleich 0 sind.

B.4 Lineares Modellbeispiel ohne Einbettung

Betrachtet wird das lineare System Σ , welches durch die beiden folgenden Gleichungen dargestellt werden kann.

$$\begin{aligned}x_{k-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u_{k-1} & x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ & & \Leftrightarrow & \\ y_k &= [1 \quad 2] x_k & & y_k = [1 \quad 2] x_k\end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Mit der linken Darstellung kann die Iteration rückwärts in der Zeit durchgeführt werden. Diese wird zunächst verwendet, um die Ausgangshistorie (Beobachtungsabbildung) des Systems zu bestimmen, somit ergibt sich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_{k-2} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Y}(U_k, x_k)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \end{bmatrix}}_{U_k} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Wie beschrieben, werden in dem Modell die Historien $U_k, \mathcal{Y}(U_k, x_k)$ durch die Werte in den Filtern, den Modellzuständen U_k^M, Y_k^M , ersetzt. Da das System beobachtbar ist, kann aus den Modellzuständen nun ein Schätzwert \hat{x}_k bestimmt werden.

Hierzu muss in der Gleichung (B.4) neben U_k, Y_k auch x_k durch \hat{x}_k ersetzt und die Gleichung danach umgestellt werden. Somit ergibt sich die Gleichung

$$\hat{x}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}}_{Q(U_k^M, Y_k^M)} \left(Y_k^M + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.75 & 0.5 \end{bmatrix} U_k^M \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.2 & 1.2 \end{bmatrix}}_{M_y} Y_k^M + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 1 & 0.6 \end{bmatrix}}_{M_u} U_k^M$$

zur Berechnung von \hat{x}_k in Abhängigkeit von den Modellzuständen Y_k^M und U_k^M . Mittels $y_k^M = c\hat{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x}_k$ wird der Ausgang des Modells berechnet. Dieser wird als Eingang für den 2. Filter verwendet, somit lässt sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} U_{k+1}^M &= F U_k^M + g u_k \\ Y_{k+1}^M &= F Y_k^M + g y_k^M = (F + g c M_y) Y_k^M + (g c M_u) U_k^M \\ y_k^M &= c \begin{bmatrix} M_u & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k^M \\ Y_k^M \end{bmatrix} \end{aligned}$$

das Modell

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U^M \\ Y^M \end{bmatrix}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_M} \begin{bmatrix} U^M \\ Y^M \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_M} u_k \\ y_k^M &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{C_M} \begin{bmatrix} U^M \\ Y^M \end{bmatrix}_k \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

erstellen.

Betrachtet man nur die Eigenbewegungen des Systems und des Modells, so sieht man, dass diese bei beiden gleich sind. Bei dem Modell kommen lediglich noch die beiden Eigenwerte bei 0 aus dem Eingangfilter hinzu.

Die Übertragungsfunktion G_{uy} des System lässt sich mittels

$$G_{uy} = c [zI - A]^{-1} B = \frac{2z + 1}{z^2 - z - 2}$$

aus der zeitlich positiven Darstellung des Systems nach B.3 bestimmen. Ebenso kann man aus der Darstellung B.5 die Übertragungsfunktion des Modells berechnen, für diese ergibt sich

$$G_{uy} = C_M [zI - A_M]^{-1} B_M = \frac{2z^3 + 1z^2}{z^4 - z^3 - 2z^2} = \frac{2z + 1}{z^2 - z - 2}$$

Folglich haben Modell und Strecke sowohl die gleichen Eigenbewegungen, als auch die gleiche Übertragungsfunktion und somit kann man einen Systemverlauf mit dem Modell nachbilden.

Hierfür ist es nun noch nötig, dass es für alle Anfangswerte des Systems auch Startwerte des Modells gibt, so dass beide bei gleichem Eingang auch das gleiche Ausgangssignal erzeugen.

Ein solcher Startwert des Modells lässt sich aus der Gleichung (B.4) ermitteln. Für einen beliebigen Startwert x_{k_0} des Systems und eine beliebige, gewählte Eingangshistorie U_{k_0} lässt sich aus der Gleichung (B.4) eine passende Ausgangshistorie $\mathcal{Y}(U_{k_0}, x_{k_0})$ des Systems berechnen. Werden diese Werte nun als Startwerte des Modells verwendet, d.h. $(U_{k_0}^M, Y_{k_0}^M) = (U_{k_0}, \mathcal{Y}(U_{k_0}, x_{k_0}))$, so erzeugen Modell und System (mit x_{k_0}) bei gleichem Eingangssignal den gleichen Ausgangsverlauf.

Aus der beliebigen Wahl der Eingangshistorie ergibt sich, dass der Startwert des Modells nicht eindeutig ist, sondern dass es zu jedem Systemstartwert unendlich viele Modellstartwerte gibt. Der Modellstartwert wird aus Historien des Systems gebildet und da gibt es eben unendlich viele Historien, die zu dem aktuellen Zustand führen können und anschließend den gleichen Verlauf des Ausgangs erzeugen.

B.5 Stabile Einbettung mittels Projektion

Mit der folgenden Methode wird eine einschritt-stabile Einbettung erreicht, d.h. nach einem Schritt befindet sich das Modell auf einer systemkonsistenten Historie. Der Modellzustand $Y_k^M \in \mathbb{R}^N$ wird auf den Zustand $\bar{Y}_k^M \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n, U_k^M)$ projiziert, d.h. es gilt $\bar{Y}_k^M = Y_k^M + p((U, Y)_k^M) \gamma((U, Y)_k^M)$. Dabei ist $p(\cdot)$ die Projektionsrichtung und $\gamma(\cdot)$ ein Maß für die Länge der Projektion, diese sind beide vom aktuellen Modellzustand abhängig.

Für die Iteration des Modells wird nun der Zustand $(U, \bar{Y})_k^M$ verwendet und somit erfolgt

$$\begin{aligned} (U, Y)_{k+1}^M &= F(U, \bar{Y})_k^M + g(u_k, y_k^M) \\ &= F(U, Y)_k^M + g(u_k, y_k^M) + \underbrace{F(0, p((U, Y)_k^M) \gamma((U, Y)_k^M))}_{S((U, Y)_k^M)} \quad . \end{aligned}$$

Wird die Projektion auch für die Erweiterung der Umkehrabbildung verwendet, so gilt außerdem

$$y_k^M = h(\tilde{Q}(U_k^M, Y_k^M)) = h(Q(U_k^M, \bar{Y}_k^M)) \quad .$$

Hiermit ist nach einem Schritt $(U, Y)_k^M \in \mathcal{H}$ und somit $\gamma((U, Y)_k^M) = 0$, daher gilt für die Stabilisierung $S((U, Y)_k^M) = 0$. Folglich hat die Stabilisierung nur dann

Einfluss auf das Modell, wenn der aktuelle Zustand in $\bar{\mathcal{H}}$ liegt.

Wie im Abschnitt 4.2.1 geschrieben kann es passieren, dass Sprünge in der Projektion auftreten, da der Vektor $p((U, Y)_k^M)$ für benachbarte $(U, Y)_k^M$ in unterschiedliche Richtungen zeigen kann und somit auch zu (relativ) beliebig weit auseinanderliegenden $(U, Y)_k^M$ führen kann.

B.6 Asymptotisch stabile Einbettung

Aufbauend auf der einschrittigen Stabilisierung der Einbettung $S((U, Y)^M)$ kann nun aber auch ein $S_\alpha((U, Y)^M)$ entwickelt werden, so dass

$$\text{dist}((U, Y)_{k+1}^M, \mathcal{H}) < \text{dist}((U, Y)_k^M, \mathcal{H})$$

gilt. Dies führt aber nicht zu einem Dead-Beat-Verhalten, sondern es entsteht eine asymptotisch stabile Einbettung. Erreichen lässt sich dies indem die Rückführung $S((U, Y)^M)$ durch die Rückführung

$$S_\alpha((U, Y)^M) = \alpha F(Y(U^M, Q_{LF}(U^M, Y^M)) - Y^M)$$

mit passendem α , ersetzt wird.

Für $\alpha = 1$ entspricht dies der Rückführung $S((U, Y)^M)$, weicht α nun von dem Wert 1 ab, so wird das System immer noch mit dieser Rückführung stabilisiert, solange α nicht zu weit abweicht.

Dies kann an folgendem linearen Beispiel veranschaulicht werden, denn bei diesem ist die Einbettung, bzw. der Eigenwert der Einbettung, berechenbar. Somit kann der Bereich für α , in dem die Einbettung stabil ist, berechnet werden.

Beispiel 2.1:

Verwendet wird das Modell aus Beispiel 4.1 mit $Q_{5,-4}(\cdot)$ nach Gleichung (4.10), so dass der zusätzliche Eigenwert, also der der Einbettung, bei 2 liegt. Dies bedeutet, dass sich der Abstand von Modellzustand und \mathcal{H} ohne stabilisierende Rückführung jeweils verdoppeln würde. Soll dies nun stabilisiert werden, so muss $0.5 < \alpha < 1.5$ sein, denn für den Abstand $\text{dist}((U^M, Y^M)_k, \mathcal{H})$ gilt

$$\text{dist}((U^M, Y^M)_{k+1}, \mathcal{H}) \leq (1 - \alpha)2\text{dist}((U^M, Y^M)_k, \mathcal{H}) \quad .$$

Dabei steht die 2 für den zusätzlichen Eigenwert des Modells.

In der Abbildung B.1 wird das Modell, mit verschiedenen α -Stabilisierungen betrachtet. Dabei ist $u_k \equiv 1$ (somit $U_k^M = [1, 1]^T$) und $Y_0^M = [3, 3]^T$. Dargestellt werden die Ausgangsverläufe des Modells, die sich

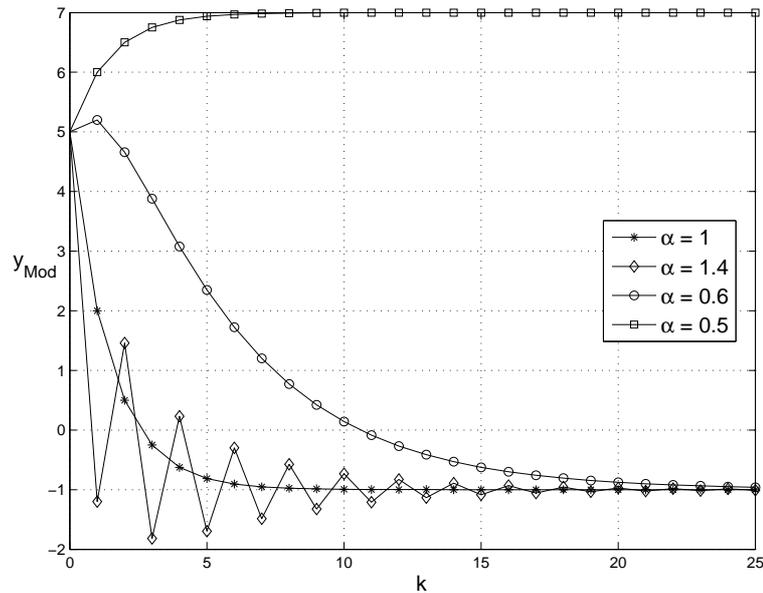


Abbildung B.1: Verlauf des Modellausgangs bei Verwendung von verschiedenen α -Werten in der Rückführung $S_\alpha(\cdot)$

für unterschiedliche Wahl von α ergeben. Weil das System stabil ist, läuft es für einen konstanten Eingang gegen einen konstanten Endwert, der ist in diesem Fall $y_{k \rightarrow \infty} = -1$.

Für $\alpha = 1$ erhalten wir ein Dead-Beat Verhalten der Einbettung und dieses Modell erzeugt nach dem ersten Schritt einen echten Systemverlauf. Für $\alpha = 0.5$ wird eine grenzstabile Einbettung erzielt, dies entspricht einem Eigenwert bei 1, daher läuft das Modell gegen einen anderen Endwert. Die weiteren Verläufe sind asymptotisch stabile Einbettungen, die umso schneller gegen \mathcal{H} konvergieren, je näher α an der 1 liegt. \square

Bei linearen Systemen/Modellen lässt sich der Bereich für α sehr gut angeben, da alle Eigenbewegungen entlang der Eigenvektoren stattfinden. Dadurch kann die Dynamik des Abstandes mittels der Eigenwerte und Anwendung der Strahlensätze sehr gut abgeschätzt werden.

Bei nichtlinearen Systemen lässt sich der Bereich für α nicht so leicht bestimmen, hier kann evtl. mittels der Lipschitzeigenschaft des Modells ein Bereich für α angegeben werden, in dem die Einbettung stabil bleibt.

Anhang C

C.1 Verwendete Bezeichnungen

k	Laufindex des diskreten Systems, steht für den Zeitpunkt $t = kT$
x_k	Zustand des diskreten Systems (\hat{x}_k Schätzwert des Beobachters)
u_k	Eingangsgröße des diskreten Systems
y_k	Ausgangsgröße des diskreten Systems (y_k^M beim Modell)
U_k	Eingangshistorie, ein Vektor aus den N zurückliegenden Eingangsgrößen des Systems (\hat{U}_k beim Beobachter und U_k^M beim Modell, hier auch jeweils Teil des Zustands)
Y_k	Ausgangshistorie, ein Vektor aus den N zurückliegenden Ausgangsgrößen des Systems (\hat{Y}_k beim Beobachter und Y_k^M beim Modell, hier auch jeweils Teil des Zustands)
$\mathcal{Y}(U_k, x_k)$	Beobachtungsabbildung, die Ausgangshistorie des Systems zu der Eingangshistorie U_k und dem Zustand x_k
\mathcal{H}	Die Menge aller möglichen Ein-/Ausgangshistorien des Systems
$Q(U_k, Y_k)$	Die Umkehrabbildung der Beobachtungsabbildung, diese liefert den Zustand x_k zu den Historien U_k und $Y = \mathcal{Y}(U_k, x_k)$
$Q_{LF}(\cdot, \cdot), \tilde{Q}(\cdot, \cdot)$	Erweiterungen der Umkehrabbildung $Q(\cdot, \cdot)$ auf nicht systemkonsistente Historien
$S((U, Y)_k^M)$	(einschrittige) Stabilisierung der Einbettung
$k(x_k)$	Eine exponentiell stabilisierende Zustandsvektorrückführung
$ \cdot $	Wenn nichts anderes gesagt wird, bezeichnet dies die 2-Norm bei Vektoren, d.h. $ x = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ und die Frobenius-Norm bei Matrizen, d.h. $ A = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$ und speziell $ (U, Y) = (U ^2 + Y ^2)^{\frac{1}{2}}$

C.2 Verwendete Konstanten

n	Ordnung des betrachteten Systems
L_C	Lipschitzkonstante des kontinuierlichen Systems Σ_C
T	Abtastzeit für die Diskretisierung, falls ein kontinuierliches System zu Grunde liegt
L	Lipschitzkonstante des diskreten Systems Σ
N	Anzahl der notwendigen Messwerte, damit das System die Beobachtbarkeitsbedingung erfüllt.
c	Faktor in der Beobachtbarkeitsdefinition (siehe Definition 3.1.1)
L_B	Lipschitzkonstante der Beobachtungsabbildung $\mathcal{Y}(U_k, x_k)$
L_Q	Lipschitzkonstante der Umkehrabbildung $Q(U_k, \mathcal{Y}(U_k, x_k))$
L_{Mod}	Lipschitzkonstante des Modells
L_M	Lipschitzkonstante des Modells mit Stabilisierung der Einbettung

Literaturverzeichnis

- [1] BURGER, ALEXANDRA: *Zum Erhalt der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit bei Diskretisierung dynamischer Systeme*. Dissertation, Universität Kassel, eingereicht, März/April 2008.
- [2] DIAZ, HERNANDO und ALAN A. DESROCHERS: *Modelling of nonlinear discrete-time systems from input-output data*. Automatica, 24(5):629–641, 1988.
- [3] ENGEL, R.: *Zustandsbeobachter für nichtlineare Systeme*. Dissertation, Universität Kassel, 2002.
- [4] ENGEL, R. und G. KREISSELMEIER: *Nonlinear approximate observers for Feedback Control*. Systems and Control Letters, 56(3):230–235, march 2007.
- [5] ESREF ESKINAT, STANLEY H. JOHNSON, WILLIAM L. LUYBEN: *Use of Hammerstein models in identification of nonlinear systems*. AIChE Journal, 37(2):255–268, 1991.
- [6] GREBLICKI, WŁODZIMIERZ: *Nonparametric identification of Wiener systems*. IEEE Trans. Inf. Theory, 38(50):1487–1493, 1992.
- [7] I.J. LEONTARITIS, S.A. BILLINGS: *Input-output parametric models for nonlinear systems*. Int. J. Control, 41:303–344, 1985.
- [8] J.P. GAUTHIER, H.HAMMOURI und S: OTHMAN: *A simple observers for Nonlinear Systems Applications to Bioreactors*. IEEE Transaction on Automatic Control, 37(6):875–880, 1992.
- [9] K.J. HUNT, D. SBARBARO, R. ZBIKOWSKI und P.J. GAWTHROP: *Neural Networks for Controls Systems - A Survey*. Automatica, 28(6):1083–1112, 1992.
- [10] K.S. NARENDRA, K. PARTHASARATHY: *Identification and control of dynamical systems using neuralnetworks*. IEEE Transactions on Neural Networks, 1(1):4–27, 1990.

- [11] L.R. HUNT, D.A. LINABERGER, R.D. DEGROAT: *Realizations of Nonlinear Systems*. Circuits Systems Singal Process, 8(4):487–506, 1989.
- [12] LUENBERGER, D.: *An introduction to observers*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.16:596–602, 1971.
- [13] R. FINDEISEN, L. IMSLAND, F. ALLGÖWER und B. A. FOSS: *State and output feedback nonlinear model predictive control: An Overview*. European Journal of Control, 9(2-3), 2003.
- [14] R. ROTHFUSS, J. RUDOLPH und M.ZEITZ: *Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme*. at-Automatisierungstechnik, 45(11):517–525, 1997.
- [15] RAPAPORT, A. und A. MALOUM: *Design of exponential observers for nonlinear systems by embedding*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 14:273–288, 2004.
- [16] RUDOLPH, J.: *Flachheit: Eine nützliche Eigenschaft auch für Systeme mit Totzeit*. at-Automatisierungstechnik, 53(4-5):178–188, 2005.
- [17] WERNER, DIRK: *Einführung in die höhere Analysis. Topologische Räume, Funktionentheorie, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch, Berlin, 2006.
- [18] ZIMMER, GERTA: *Zustandsbeobachtung nichtlinearer Systeme*. Shaker, Aachen, 1997.